GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un,

par LUCIEN GODEAUX, docteur en sciences physiques et mathématiques, à Morlanwelz (*).

Dans leur beau mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (**), MM. Enriques et Severi ont étudié les involutions existant sur une surface de Jacobi et plus particulièrement celles de ces involutions qui sont de genres un ($p_a = P_4 = 1$). En premier lieu, ils ont démontré qu'une involution d'ordre n, dotée d'un nombre fini de coïncidences, donnée sur une surface de Jacobi ou de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$), est engendrée par un groupe de n transformations birationnelles de la surface en elle-même, chaque groupe de l'involution étant obtenu en appliquant les n transformations à un point de ce groupe. En ce qui regarde spécialement les involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) sur une surface de Jacobi, ils ont démontré que n ne peut avoir comme facteurs premiers que deux et trois et que, de plus, on a $n \leq 24$.

Il y a peu de temps, M. Enriques a démontré qu'une involution de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et d'ordre n, située sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), est engendrée par un groupe de n transformations birationnelles de la surface en elle-même (***). Au cours d'un séjour de quelques mois que je fis à Bologne, M. Enriques m'engagea à rechercher si l'on ne pouvait pas limiter le nombre n comme dans le cas des surfaces

---

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4, pp. 310-328, 1913.

Présenté par M. Neuberg.

(**) ENRIQUES et SEVERI, Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (Prix Bordin, 1907). (*Acta Mathematica,* 1909, vol. XXXII et XXXIII.) Voir aussi BAGNERA et DE FRANCHIS. (*Societa dei XL*, 1908.)

(***) ENRIQUES, Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. (*Rend. della R. Accad. di Bologna*, 1909-1910.)

hyperelliptiques. J'ai été assez heureux pour faire faire un premier pas vers la solution de cette question et établir précisément que :

Si entre deux surfaces algébriques F, Φ, *de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *il existe une correspondance* (p, 1), *où* p *est premier,* p *peut seulement prendre les valeurs* p = 2, p = 3.

Ce théorème peut s'énoncer d'une manière différente sous cette forme :

S'il existe une involution de genres un et d'ordre premier sur une surface de genres un, l'ordre de cette involution ne peut être que deux ou trois.

On en déduit le corollaire suivant :

S'il existe une involution de genres un et d'ordre n *sur une surface de genre un,* n *n'admet comme facteurs premiers que deux et trois* (*).

La démonstration que nous donnerons de ce théorème diffère sensiblement de celle qui a été utilisée par MM. Enriques et Severi pour établir leur théorème sur les surfaces hyperelliptiques. Ces géomètres ont en effet pu utiliser la propriété de la surface de Jacobi de représenter les couples de points d'une courbe de genre deux et les recherches de M. Bolza sur les transformations d'une pareille courbe en elle-même. C'est même ce qui a permis à MM. Enriques et Severi de prouver que l'on a $n \leq 24$, ce que nous n'avons pu faire avec notre procédé. Notons d'ailleurs que celui-ci pourrait servir à démontrer que, sur une surface hyperelliptique, une involution de genres un et d'ordre premier est nécessairement d'ordre deux ou trois. De plus, il est probable que notre procédé de démonstration pourra aussi s'appliquer à l'étude des involutions de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$ existant sur une surface également de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$.

(*) Un résumé de la démonstration de ces théorèmes a été publié aux *Comptes rendus,* séance du 12 août 1912, t. CLV.

Voici maintenant une esquisse de la démonstration du théorème énoncé plus haut.

Je considère une involution I_p d'ordre premier p et de genres un, sur une surface F également de genres un. Je construis sur F un système linéaire $|D|$ de degré $N = 2p^2(\pi - 1)$ et de genre $\Pi = 2p^2(\pi - 1)$, invariant pour la transformation T, cyclique d'ordre p, qui, d'après le théorème de M. Enriques, engendre l'involution I_p. Cela me permet de construire une surface Φ, d'ordre $2p^2(\pi - 1)$, de l'espace linéaire à $p(\pi - 1) + 1$ dimensions, à sections hyperplanes de genre $p(\pi - 1) + 1$, représentative de l'involution I_p. Sur la surface Φ, en correspondance $(1, p)$ avec F, il existe un nombre fini de points de diramation; je démontre que ces points sont doubles. En utilisant les formules classiques de Zeuthen et de Zeuthen-Segre, je trouve une relation entre le nombre x des points de diramation, le nombre h qui exprime l'abaissement de la classe de Φ produit par la présence d'un de ces points, et l'abaissement i du genre d'une courbe D assujettie à la seule condition de passer par un point de coïncidence de I_p. Je démontre alors que si la transformation T équivaut à l'identité dans le voisinage d'un point de coïncidence sur F, on a $p = 2$, et que dans le cas contraire, on a $p > 2$. Cela me conduit à une limite inférieure de h, puis à l'égalité $h = p$ et, enfin, à $h = p = 3$.

Je rappellerai qu'une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ possède tous les genres égaux à l'unité (*) :

$$p_a = p^{(1)} = p_g = P_2 = P_3 = P_4 = \ldots = 1$$

et, par conséquent, son invariant de Zeuthen-Segre est $I = 12p_a + 9 - p^{(1)} = 20$.

(*) Voir Enriques, Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$. (*Rend. della R. Accad. di Bologna*, déc. 1906.)

Les courbes canoniques et pluricanoniques d'une telle surface sont d'ordre zéro. Un système linéaire complet de genre π situé sur une surface de genres un a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π; il est son propre adjoint.

1. — Soit F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$), d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, située dans un espace linéaire S_π à π dimensions. Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F.

Supposons que sur la surface F, il existe une involution I_p, de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et d'ordre premier p, c'est-à-dire une double infinité de groupes de p points telle qu'un point de F appartienne à un seul groupe et que l'on puisse établir une correspondance birationnelle entre ces groupes et les points d'une surface de genres un.

D'après le théorème de M. Enriques rappelé dans l'introduction, il existe une transformation birationnelle T de la surface F en elle-même, cyclique d'ordre (période) p ($T^p \equiv 1$), et pour construire le groupe de I_p contenant un point donné, il suffit d'adjoindre à ce point les $p - 1$ transformés au moyen de $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$.

L'involution I_p ne peut présenter, sur la surface F, qu'un nombre fini de points de coïncidence, car s'il existait une courbe de coïncidence de I_p, cette courbe appartiendrait à la courbe canonique de F, d'après un théorème de M. Enriques (*). Ainsi F aurait une courbe canonique d'ordre supérieur à zéro, ce qui est impossible.

Un point de coïncidence de I_p sur F est invariant pour la transformation T; par suite, il est aussi invariant pour les différentes puissances de T, et ainsi, compté p fois, ce point forme un groupe de I_p.

(*) Enriques, Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche. (*Mem. della R. Accad. di Torino,* 1893, ser. 2ª, vol. XLIV.)

2. — Nous dirons, pour abréger le discours, qu'une courbe algébrique tracée sur F est *invariante* pour T lorsque cette transformation échange entre eux les points de cette courbe. Un système linéaire de courbes sera dit *invariant* pour T lorsque cette transformation fera correspondre à une courbe du système une courbe du même système coïncidant ou non avec la première.

Ces définitions posées, je dis que le système $|C|$ des sections hyperplanes de F peut être supposé invariant pour T.

Pour que cette supposition puisse se faire, il nous faut tout d'abord prouver que $|C|$ n'est pas composé avec I_p et ensuite prouver que si $|C|$ n'est pas invariant, on peut en déduire un système invariant qui, à son tour, pourra être pris comme système des sections hyperplanes de F.

Supposons donc que $|C|$ puisse être composé avec I_p, c'est-à-dire que les courbes C, passant par un point arbitraire, passent en conséquence par les $p - 1$ points qui, avec le point choisi, forment un groupe de I_p. Alors la surface F se réduirait à une surface F^*, p — *uple*, d'ordre $\frac{1}{p}(2\pi - 2)$, et à un point de F^* correspondraient p points de F formant un groupe de I_p. Par suite, F^* serait une surface de genres un. Alors F^* serait située dans un espace linéaire à $\frac{1}{p}(\pi - 1) + 1$ dimensions. Mais par hypothèse, F^* est située dans un espace à π dimensions. L'hypothèse d'un système invariant $|C|$, composé avec I_p, nous conduit donc à une absurdité et doit être rejetée.

Supposons maintenant que $|C|$ ne soit pas invariant pour T. Alors les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} changent $|C|$ en les systèmes

$$|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|.$$

Le système

$$|C'| = |C + C_1 + C_2 + \ldots + C_{p-1}|$$

est invariant pour T et peut être pris comme système des sections hyperplanes de F.

Ainsi donc, on peut supposer que le système des sections hyperplanes de F est invariant pour T.

3. — *Construction d'une surface* Φ *représentative de l'involution* I_p. — Considérons une courbe C_1 du système invariant $|C|$ qui n'est pas elle-même invariante pour T (ce qui est toujours possible puisque $|C|$ n'est pas composé avec I_p). Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} font correspondre à cette courbe des courbes différentes C_2, C_3, ..., C_p appartenant au système invariant $|C|$. La courbe

$$D \equiv C_1 + C_2 + \ldots + C_p$$

est invariante pour T et le système complet

$$|D| = |C_1 + C_2 + \ldots C_p| = |pC|$$

est invariant pour T. Par des formules connues, on trouve que $|D|$ a le degré $N = 2p^2(\pi - 1)$ et le genre (= dimension) $\Pi = p^2(\pi - 1) + 1$.

Soit Φ une surface de genres un dont les points représentent les groupes de l'involution I_p. A la courbe C_1 correspond, sur Φ, une courbe Γ, de genre effectif π, en correspondance birationnelle avec chacune des courbes C_1, C_2, ..., C_p. Dans la correspondance (1, p) existant entre Φ et F, la courbe Γ aura donc pour transformée la courbe dégénérée

$$D \equiv C_1 + C_2 + \ldots + C_p.$$

La courbe Γ, de genre effectif π, possède $(p - 1)(\pi - 1)$ points doubles. Considérons, en effet, un point A_1 commun à la courbe C_1 et à la courbe C_2. Le point A_2, transformé de A_1 par T, se trouve sur C_2 et sur C_3. D'une manière générale, le point A_{i+1} $(i > 0)$, transformé de A_1 par T^i, se trouvera sur les courbes C_{i+1} et C_{i+2}. Le point A_p, obtenu en faisant $i = p - 1$, se trouvera donc sur les courbes C_p et C_1. Au couple de points A_1, A_p de C_1 correspondra donc un seul point de Γ et cette courbe passera avec deux branches par ce point. Le même raisonnement peut se tenir pour les points communs à C_1 et à l'une des courbes $C_2, C_3, \ldots, C_p$. Or, ces points sont au nombre de $2(p-1)(\pi-1)$, donc Γ a $(p-1)(\pi-1)$ points doubles. Cette courbe Γ a donc le genre virtuel $\pi + (p-1)(\pi-1)$ et elle engendre par conséquent un système linéaire $|\Gamma|$, de degré virtuel $2p(\pi-1)$, de genre virtuel $\pi + (p-1)(\pi-1) = p(\pi-1)+1$ et de dimension $p(\pi-1)+1$.

A une courbe Γ quelconque correspond sur F une courbe D invariante pour T. On voit donc que dans le système invariant $|D|$, de dimension $p^2(\pi-1)+1$, il existe un système linéaire de dimension $p(\pi-1)+1$, que nous désignerons par $|D_0|$, composé avec I_p ; c'est-à-dire que chaque courbe D_0 du système *incomplet* $|D_0|$ est invariante pour T.

Le système $|\Gamma|$ est :

1° Dépourvu de points-bases, car si $|\Gamma|$ avait un point-base, les p points correspondants sur F seraient des points-bases de $|C|$. Or $|C|$ étant le système des sections hyperplanes de F, ne peut avoir de points-bases.

2° Simple. Supposons, en effet, que les courbes Γ passant par un point A, passent, en conséquence, par un point B. Alors les courbes C passant par un des correspondants A_1 de A sur F, passeraient, en conséquence, par l'un au moins, B_1, des correspondants de B sur F. $|C|$ serait donc composé. Or, $|C|$ étant le système des sections hyperplanes de F, est certainement simple.

Cela étant, si nous rapportons projectivement les courbes de $|\Gamma|$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{p(\pi-1)+1}$ à $p(\pi-1)+1$ dimensions, nous obtiendrons, comme modèle projectif de Φ, une surface (que nous désignerons encore par Φ) d'ordre $2p^2(\pi-1)$, à sections hyperplanes de genre $p(\pi-1)+1$.

4. — *Relation entre* p, x *et* h. — Soit x le nombre des points de diramation de la surface Φ pour la correspondance $(1, p)$ entre Φ et F.

Considérons un de ces points P′ et soit P le point de coïncidence correspondant sur F. Nous désignerons par h l'abaissement de la classe de la surface Φ produite par la singularité que Φ aura éventuellement en P′, par i l'abaissement du genre d'une courbe D_0 assujettie à la seule condition de passer par P.

Supposons en premier lieu que la surface Φ n'a aucune singularité en P′ $(h = 0)$. Considérons une courbe Γ passant par P′ (courbe de genre $p[\pi - 1] + 1$) et la courbe D_0 correspondante. Entre ces courbes, nous avons une correspondance $(1, p)$, et si δ désigne le nombre des coïncidences sur la courbe D_0, la formule de Zeuthen nous donne

$$p\{2p(\pi - 1)\} + \delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

c'est-à-dire $\delta = i = 0$. Or δ est certainement supérieur à zéro. L'absurdité à laquelle nous sommes amenés provient de ce que nous avons supposé que P′ était simple pour Φ. Cette surface possède donc un point multiple en un point de diramation. Précisément, elle y possède un point double qui ne peut être tacnodal, car l'existence d'un point de multiplicité supérieur à deux ou d'un point double tacnodal sur Φ conduirait à l'existence de systèmes linéaires de dimension supérieure au genre (*).

Considérons une courbe Γ passant par P′; elle y possède un point double et par suite son genre est abaissé d'une unité. Soit δ le nombre de coïncidences sur la courbe D_0 correspondante à la Γ choisie. La formule de Zeuthen donne

$$p\{2p(\pi - 1) - 2\} + \delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

c'est-à-dire

$$\delta + 2i = 2p.$$

(*) Enriques, Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche. (*Mem. della Soc. delle Scienze* [*detta lei XL*], 1896, ser. 3, t. X.)

Mais l'involution d'ordre p existant sur la courbe D_0 envisagée est cyclique, donc δ est multiple de $p - 1$ et de plus est pair. par suite, deux cas sont possibles :

$$a) \quad \delta = p - 1, \qquad i = \frac{1}{2}(p+1),$$

$$b) \quad \delta = 2(p-1), \qquad i = 1,$$

le second cas étant seul acceptable lorsque $p = 2$.

Dans le cas a, la singularité des D_0 est évidemment composée de points doubles infiniment voisins.

5. — Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre des surfaces F et Φ, et rappelons-nous que cet invariant est $I = 20$.

Sur la surface Φ, nous considérons un faisceau de sections hyperplanes Γ. Un point de diramation abaissant la classe de Φ de h unités, on aura

$$I = 20 = m + xh - 2p(\pi - 1) - 4p(\pi - 1) - 4,$$

m étant la classe effective de Φ, c'est-à-dire le nombre des Γ du faisceau considéré ayant un point double en un point simple de Φ.

Les courbes D_0 correspondantes à ces Γ formeront un faisceau sur F. A une courbe Γ ayant un point double en un point simple de Φ correspondra une D_0 ayant p points doubles en des points simples de F. On aura donc, sur F :

$$I = 20 = mp + xi - 2p^2(\pi - 1) - 4p^2(\pi - 1) - 4.$$

Éliminons m entre ces deux équations. Il vient

$$x(ph - i) = 24(p-1).$$

Plaçons-nous en premier lieu dans le cas a $(p > 2)$: il vient

$$x(2ph - p - 1) = 48(p-1).$$

Résolvons par rapport à h :

$$h = \frac{(48 + x)p + x - 48}{2xp},$$

h étant entier (> 1), p divise $x - 48$. Posons donc

$$x = 48 \pm kp,$$

k étant un entier positif. Nous obtenons

$$h = \frac{96 \pm k(p + 1)}{96 \pm 2kp}.$$

Mais $2kp$ étant supérieur à $k\,(p + 1)$, le signe — est seul valable, et on a

$$h = \frac{96 - k(p + 1)}{96 - 2kp}. \qquad (1)$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse b ; la formule trouvée donne

$$h = \frac{24p - 24 + x}{px}.$$

Donc p divise $x - 24$. Posons, k étant un entier positif,

$$x = 24 \pm kp.$$

On voit que le signe + doit être rejeté et qu'il reste

$$h = \frac{24 - k}{24 - kp}. \qquad (2)$$

Nous allons maintenant examiner la manière dont T se comporte dans le voisinage d'un point de coïncidence P.

6. — *La transformation* T *se confond avec l'identité dans le voisinage d'un point de coïncidence.* — A un point A_1 de F, la transformation T fait correspondre un point A_2. Lorsque A_1 s'approche indéfiniment d'un point de coïncidence P, le point A_2 s'approche également de P. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le correspondant d'un point A_1 infiniment voisin d'un point de coïncidence P se confond avec A_1, ou bien il en diffère généralement. Dans le premier cas, on dira que T se confond avec l'identité (ou avec la transformation identique) dans le voisinage de P.

Supposons actuellement que ce premier cas se présente. Considérons une courbe C_1, non invariante pour T, appartenant au système invariant $|C|$, et passant par le point de coïncidence P. A C_1, les transformations T, T^2, . . . , T^{p-1} font correspondre respectivement les courbes C_2, C_3, . . . , C_p de $|C|$, passant par P et touchant C_1 en ce point. La courbe réductible, invariante pour T,

$$D_0' = C_1 + C_2 + \ldots + C_p,$$

possède en P un point p-uple avec un point p-uple infiniment voisin.

On peut évidemment former de cette manière une infinité de courbes analogues à D_0'. Soit D_0'' l'une de ces courbes (différente de D_0'). Les courbes D_0', D_0'' déterminent un faisceau de courbes D_0, invariantes pour T, possédant en P un point p-uple ordinaire. D'après l'hypothèse faite, sur chaque branche d'une pareille D_0, il y aura un point de coïncidence d'ordre p (pour l'involution cyclique γ_p existant sur cette courbe) infiniment voisin de P. Considérons une de ces D_0 et la courbe Γ correspondante. Soit y le genre de celle-ci. On a par la formule de Zeuthen :

$$p(2y-2) + p(p-1) = 2p^2(\pi - 1) - p(p-1),$$

d'où

$$y = p\pi - 2p + 2.$$

D'autre part, le degré effectif du système linéaire formé par les courbes D_0 ayant un point p uple ordinaire en P, est égal à $2p^2(\pi - 1) - p^2$. Les courbes Γ correspondantes à ces D_0 particulières forment par suite un système linéaire de degré effectif $2p(\pi - 1) - p$. Mais le degré virtuel $2y - 2 = 2p\pi - 4p + 2$ de ce système est au moins égal au degré effectif; par suite, on a

$$2p(\pi - 2) + 2 \geq p(2\pi - 3),$$

c'est-à-dire $p = 2$ (car $p > 1$ par hypothèse). Ainsi, *lorsque la transformation* T *se confond avec la transformation identique dans le voisinage d'un point de coïncidence,* on a $p = 2$.

7. — *La transformation* T *ne se confond pas avec l'identité dans le voisinage d'un point de coïncidence.* — Considérons le plan tangent à la surface F en un pointde coïncidence P et le faisceau de rayons (tangents à F) situé dans ce plan et de sommet P. Un rayon d de ce faisceau touche F en P et par suite a en commun avec F un point infiniment voisin de P. A ce point, T fait correspondre un point également du domaine de P, mais différent du premier. Ce point détermine une seconde droite du faisceau. Ainsi, T détermine, dans le faisceau des tangentes à F en P, une correspondance cyclique. Comme on le voit, il y a deux coïncidences d'ordre $p - 1$ et ainsi il y a, dans le domaine de P, deux points de coïncidence, soit P_1, P_2.

Considérons une courbe C_1 non invariante pour T, appartenant au système invariant $|C|$, et passant par P et P_1 (c'est-à-dire touchant en P_1 une des tangentes unies). Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ de $|C|$, transformées de C_1 respectivement par $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$, passent par P et P_1, c'est-à-dire touchent C_1 en P. La courbe

$$D'_0 = C_1 + C_2 + \ldots + C_p$$

est invariante pour T et possède en P un point p-uple avec un point p-uple infiniment voisin P_1.

De même, on construira une courbe réductible D_0'', invariante pour T, ayant en P un point p-uple avec un point p-uple infiniment voisin P_2.

Les courbes D_0', D_0'' déterminent un système linéaire, au moins simplement infini, de courbes invariantes D_0 ayant en P un point p-uple ordinaire. Si nous considérons un point s'approchant de P sur une branche d'une pareille D_0, les $p-1$ points correspondants au moyen de T, T^2, . . . , T^{p-1} s'approcheront aussi de P, mais respectivement sur les autres branches de la courbe. L'involution γ_p située sur une pareille courbe D_0 n'aura donc pas de points de coïncidence. Considérons une courbe Γ correspondante à une D_0 ayant un point p-uple ordinaire en P, et dénotons par y son genre. La formule de Zeuthen donne

$$p(2y-2)=2p^2(\pi-1)-p(p-1),$$

d'où

$$y=p\pi-\frac{3}{2}(p-1).$$

Désignons par $|D_1|$ le système linéaire formé par les D_0 ayant un point p-uple en P, par $|\Gamma_1|$ le système correspondant sur Φ.

Les courbes Γ_1 possèdent donc en P′ une singularité abaissant leur genre de $p(\pi-1)+1-y=\frac{1}{2}(p-1)$ unités.

Le degré effectif de $|D_1|$ est $2p^2(\pi-1)-p^2$, donc le degré effectif de $|\Gamma_1|$ est $2p(\pi-1)-p$. Le degré virtuel de ce dernier système est d'autre part $2y-2=2p(\pi-1)-p+1$. Φ ne pouvant avoir que des points doubles non tacnodaux, il faut donc nécessairement que cette surface ait, en P′, une singularité composée de $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles et d'un point simple infiniment voisins. Mais on sait qu'une pareille singularité abaisse la classe d'au moins $\frac{p+2}{3}$ unités, donc on a $h \geqq \frac{p+2}{3}$.

Comparant cette limite inférieure de h aux formules (1) et (2), nous trouvons les seuls cas possibles :

$$\text{Hypothèse } a: \quad p = 5, \quad h = 7;$$
$$p = 3, \quad h = 6;$$
$$\text{Hypothèse } b: \quad h = p.$$

8. — *Rejet de l'hypothèse a.* — Les deux cas qui *a priori* peuvent se présenter dans l'hypothèse a se rejettent séparément de la même manière. Nous ne ferons le raisonnement que dans le premier cas ($p = 5$, $h = 7$).

Puisque l'on a $h = 7$, le point P' ne peut être un point double uniplanaire, car un pareil point possède trois points doubles infiniment voisins et abaisse la classe d'au moins six unités (*). Il est alors aisé de constituer la singularité de Φ en P'. Cette surface possède en P' un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un second point double biplanaire. A ce dernier est de nouveau infiniment voisin un point double biplanaire ordinaire (c'est-à-dire auquel est infiniment voisin un point simple). Mais cela ne peut nous convenir, car nous devons avoir sur Φ un système linéaire $|\Gamma_1|$ de degré effectif $2p(\pi - 1) - p = 10\pi - 15$, les Γ_1 étant des courbes Γ passant par P'. Or les courbes Γ (sections hyperplanes de Φ) passant par un, ou deux, ou trois, ou par les trois points doubles et le point simple composant la singularité de Φ en P', forment des systèmes linéaires ayant respectivement les degrés effectifs $10\pi - 12$, $10\pi - 14$, $10\pi - 16$, $10\pi - 17$. Par suite, le cas $p = 5$, $h = 7$ ne peut effectivement se présenter.

(*) SEGRE, Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche. (*Annali di Matematica*, 1897, ser. 2, vol. XXV, p. 12.)

Dans le cas $p = 3$, $h = 6$, on trouverait que la surface Φ a en P' une chaîne de trois points doubles infiniment voisins, dont le dernier est conique.

9. — *Limite supérieure de* p. — Nous avons déjà établi que, lorsque la transformation T se confond avec l'identité dans le voisinage d'un point de coïncidence, on a $p = 2$. Nous allons montrer que, dans le cas contraire, on a $p = 3$.

Nous avons vu qu'une courbe D_0, assujettie à la seule condition de passer par P, acquiert en ce point un point double. De plus, l'involution γ_p située sur cette D_0 possède $\delta = 2(p - 1)$ coïncidences dans le voisinage de P. Comme cette γ_p est cyclique, il y a donc deux points de coïncidence (d'ordre p) dans le voisinage de P. D'après l'hypothèse faite sur la manière d'être de T dans le voisinage de P, ces deux points de coïncidence ne peuvent être que P_1, P_2. Ainsi, *les courbes* D_0 *assujetties à la seule condition de passer par un point de coïncidence* P *acquièrent en ce point un point double dont les deux tangentes sont fixes.*

Le système linéaire formé par ces D_0 particulières possède donc un point-base double et deux points-bases simples (infiniment voisins au point-base double). Le degré effectif de ce système est donc $2p^2(\pi - 1) - 6$ et sa dimension est $p(\pi - 1)$ (puisque celle de $|D_0|$ est $p(\pi - 1) + 1$). Les courbes Γ, correspondantes à ces D_0 sur Φ, passent par le point double P' et forment donc un système linéaire de dimension $p(\pi - 1)$ et de degré $2p(\pi - 1) - 2$. Mais le degré de ce dernier système est aussi égal à celui du système des D_0 passant par P, divisé par p, c'est-à-dire à $2p(\pi - 1) - \frac{6}{p}$. On a donc

$$2p(\pi - 1) - \frac{6}{p} = 2p(\pi - 1) - 2,$$

c'est-à-dire $p = 3$.

Ainsi se trouve complètement démontré le théorème énoncé dans l'introduction de ce travail.

10. — *L'involution* I_2. — Supposons $p = 2$. D'après ce qui précède, dans le voisinage d'un point de coïncidence, l'involution I_2 a ses couples formés de deux points coïncidents. De plus, on a $h = p = 2$. En un point de diramation, la surface Φ possède donc une singularité abaissant sa classe de deux unités; cette singularité ne peut évidemment être qu'un double point conique.

Nous avons établi la formule (n° 5)

$$x(ph - 1) = 24(p - 1);$$

donc il y a $x = 8$ points de diramation sur Φ.

Si entre deux surfaces Φ, F *de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *on a une correspondance* (1, 2), *la surface* Φ *possède huit points de diramation et on peut prendre, comme modèle projectif de cette surface, une surface normale* (*) *sur laquelle les huit points de diramation sont huit points doubles coniques.*

Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Severi (**).

11. — *L'involution* I_3. — Supposons $p = 3$; alors, dans le voisinage d'un point de coïncidence, la transformation T, de période 3, qui engendre I_2, ne se confond pas avec la transformation identique. Il y a seulement deux points du domaine d'un point de coïncidence qui, comptés chacun trois fois, donnent des groupes de I_3.

(*) C'est-à-dire une surface qui n'est pas la projection d'une autre, du même ordre, appartenant à un espace à un plus grand nombre de dimensions.

(**) Severi, Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali. (*Atti del R. Istituto Veneto,* 1907, t. LXVII.)

On a $h = p = 3$; donc en un point de diramation, la surface Φ possède un point double biplanaire (avec un point simple infiniment voisin), car il n'y a qu'une telle singularité qui abaisse la classe d'une surface de trois unités. On peut d'ailleurs voir autrement qu'un point de diramation P' de Φ est biplanaire.

Tout d'abord, P' ne peut être un point double uniplanaire, car si nous considérons une courbe D_0 ayant au point de coïncidence P (correspondant à P') un point double avec les tangentes fixes PP_1, PP_2, à chacun des points P_1, P_2, infiniment voisin de P, correspondent des points différents dans le voisinage de P' sur Φ. Par conséquent, la courbe Γ, qui correspond à la D_0 envisagée, a en P' un point double avec deux tangentes distinctes, et par suite P' n'est pas uniplanaire.

Montrons maintenant que P' ne peut être conique. Pour cela, considérons les courbes D_0 passant par P et touchant en ce point une direction différente de PP_1, PP_2. Ces D_0 ont en P un point triple et coïncident avec les courbes que nous avions tantôt appelées D_1. Trois points infiniment voisins de P et situés sur les trois branches d'une D_1 forment un groupe de I_3 et à ce groupe correspond un point du domaine de P'. Par conséquent, les Γ correspondantes aux courbes D_1 ont en P' un point de rebroussement. P' n'est donc pas conique. Par suite, ce point est biplanaire ordinaire.

La formule du n° 15 nous donne actuellement

$$x(3 \cdot 3 - 1) = 24(3 - 1),$$

c'est-à-dire $x = 6$ (*). Ainsi :

Si entre deux surfaces Φ, F *de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *on a une correspondance* (1, 3), *l'involution d'ordre trois déterminée*

(*) Notre résumé paru aux *Comptes rendus* donne, par erreur, dans les dernières lignes, $x = 8$ pour $p = 3$. Cette valeur ne concorde pas avec les formules précédentes du résumé; le lecteur aura donc facilement corrigé.

sur F est cyclique, la surface Φ possède six points de diramation et on peut prendre comme modèle projectif de cette surface une surface normale sur laquelle les six points de diramation sont six points biplanaires ordinaires.

12. — *Corollaire.* — Il nous reste à établir le corollaire du théorème fondamental énoncé dans l'introduction.

Soit, sur une surface F, de genres $p_n = P_4 = 1$, une involution I_n, d'ordre n, également de genres $p_a = P_4 = 1$. M. Enriques a établi que l'involution I_n est cyclique ou qu'elle est composée avec les groupes d'une involution cyclique I'_r, r étant un diviseur de n.

Il convient de rappeler ici un théorème bien connu dont nous allons faire usage. Si sur une surface algébrique de genres p_a, p_g, P_2, P_3, . . . , on donne une involution de genres π_a, π_g, π_2, π_3, . . . , on a

$$\pi_g - \pi_a \leq p_g - p_a, \quad \pi_g \leq p_g, \quad \Pi_2 \leq P_2, \quad \Pi_4 \leq P_4.$$

Revenons maintenant à l'involution I_n donnée sur F et supposons en premier lieu qu'elle est cyclique. Alors il existe une transformation birationnelle de F en elle-même, T, de période n. Soit p un diviseur premier de n, et posons $n = pq$. Soit Φ une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, représentant l'involution I_n.

La transformation birationnelle T^p, de période p, engendre, sur la surface F, une involution I'_p d'ordre premier p. Soit Ψ une surface représentative de cette involution, p_a, p_g, P_4 respectivement ses genres arithmétique, géométrique et son quadrigenre. D'après le théorème qui vient d'être rappelé, on a $p_g - p_a = o$, $p_g \leq 1$, $P_4 \leq 1$. Remarquons d'autre part qu'à un groupe de I_n correspondent, sur Ψ, $q = \frac{n}{p}$ points. A l'ensemble des groupes de I_n correspond donc sur Ψ un ensemble de groupes de q points formant une involution I''_q. La surface Φ est évidemment une surface représentative de cette involution. Par suite, on a $1 \leq p_g$, $1 \leq P_4$; donc, à cause des inégalités déjà trouvées, $p_a = p_g = P_4 = 1$. Ainsi donc, nous avons une correspondance $(1, p)$, où p est premier, entre deux surfaces Ψ, F de genres un $(p_a = P_4 = 1)$; par suite, p ne peut prendre que les valeurs 2 et 3, ce qui démontre notre corollaire dans le cas où I_n est cyclique.

Supposons maintenant que I_n n'est pas cyclique, mais est composée avec une involution cyclique I'_r, r divisant n. Soit Ψ une surface représentative de I'_r, Φ une surface représentative de I_n. Comme précédemment, on voit qu'aux groupes de I_n correspondent sur Ψ des groupes de $s = \frac{n}{r}$ points, formant une involution I''_s dont Φ est une surface représentative. On en conclut que la surface Ψ a les genres $p_a = p_g = P_4 = 1$. Par suite, r ne peut avoir comme facteurs premiers que 2 et 3, puisque I'_r est cyclique.

Si I''_s est cyclique, alors s n'admet comme facteurs premiers que 2 et 3, et le théorème est démontré. Si I''_s n'est pas cyclique, on recommence le raisonnement fait dans l'alinéa précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à des involutions cycliques.

De toute manière, on voit que l'on doit avoir $n = 2^\alpha 3^\beta$, α et β étant des entiers positifs ou nuls.

Le problème qui se pose actuellement et que nous espérons pouvoir bientôt résoudre est de trouver des limites supérieures pour α et β.

Göttingen, 25 janvier 1913.