Bulletin de la Classe des sciences

Suite de Laplace doublement inscrite dans une suite de Laplace

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Partant d'une suite de Laplace, on construit une seconde suite de Laplace dans laquelle la première est doublement inscrite.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Suite de Laplace doublement inscrite dans une suite de Laplace. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 52, 1966. pp. 676-683;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1966.62632;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1966_num_52_1_62632;

Fichier pdf généré le 22/02/2024

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Suite de Laplace doublement inscrite dans une suite de Laplace

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Partant d'une suite de Laplace, on construit une seconde suite de Laplace dans laquelle la première est doublement inscrite.

En étudiant les couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (1), nous avons établi une propriété des directrices de Wilzynski communes à ces deux surfaces : Les foyers de ces directrices déterminent deux suites de Laplace dont l'une est doublement inscrite dans l'autre. La seconde de ces directrices décrit du reste une congruence de Goursat. Inversement, nous avons démontré que si les foyers d'une droite décrivant une congruence de Goursat déterminent une suite de Laplace doublement inscrite dans une suite de Laplace, il existe deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie dont les secondes directrices de Wilczynski sont les droites de cette congruence (2).

Dans cette note, nous considérons une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots$$

(1) *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1928, pp. 158-186, 345-348).

(2) *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1928, pp. 455-466).

On peut également consulter notre mémoire : *La géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1964, pp. 1-84).

illimitée dans les deux sens située dans un espace projectif à $r > 2$ dimensions et nous supposons que les réseaux (U^n), (V^n) sont conjugués à la congruence (U^nV^n). Les foyers de la droite U^nV^n appartiennent à une seconde suite de Laplace M à laquelle la première suite est doublement inscrite en ce sens que toute droite joignant deux points consécutifs de la suite M contient deux points de la suite L. Entre deux points appartenant à une de ces droites se trouvent, en dehors de la droite, $2n$ points de la première suite. Le cas que nous avons traité autrefois correspondait à $n = 1$ et la droite UV engendrait une congruence de Goursat.

1. Soit dans un espace projectif S_r à $r > 2$ dimensions, deux points U, V dépendant de deux variables u, v transformés de Laplace l'un de l'autre, les caractéristiques étant les lignes u, v. Nous écrirons

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0,$$

a et b étant des fonctions de u, v non identiquement nulles.

Les points U, V déterminent une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et que nous supposerons illimitée dans les deux sens.

Posons

$$h_n = -(\log bh_1h_2 \ldots h_{n-1})_{uv} + h_{n-1}, \quad h_0 = 4ab,$$

$$k_n = -(\log ak_1k_2 \ldots k_{n-1})_{uv} + k_{n-1}, \quad k_0 = 4ab,$$

et ensuite

$$H^n = bh_1h_2 \ldots h_n, \quad K^n = ak_1k_2 \ldots k_n$$

Nous avons

$$U^n = U^{n-1}_v - U^{n-1}(\log H^{n-1})_u, \quad U^n_u = h_nU^{n-1},$$

$$V^n = V^{n-1}_u - V^{n-1}(\log K^{n-1})_u, \quad V^n_v = k_nV^{n-1}.$$

2. Ces points rappelés, supposons que les réseaux (U^n), (V^n) soient conjugués à la congruence (U^nV^n). Il doit donc exister, sur la droite U^nV^n deux points P, Q transformés de Laplace l'un

de l'autre. Pour fixer les idées, nous supposerons que le point Q est le transformé de Laplace de P dans le sens des u.

Les tangentes aux courbes u aux différents points de la droite U^nV^n rencontrent la droite $U^{n-1}V^{n+1}$. Si donc il existe sur U^nV^n un point P en lequel la tangente à la courbe u coïncide avec cette droite, les droites U^nV^n et $U^{n-1}V^{n+1}$ doivent se rencontrer, c'est-à-dire que les points U^{n-1}, U^n, V^n, V^{n+1} sont dans un même plan.

De même, pour que le point Q existe, il faut que les droites U^nV^n et $U^{n+1}V^{n-1}$ se rencontrent, c'est-à-dire que les points $U^{n+1}U^nV^nV^{n-1}$ soient dans un même plan.

Il doit donc exister deux relations

$$U^{n+1} = AU^n + B'V^n + CV^{n-1}, \tag{1}$$

$$V^{n+1} = A'U^n + BV^n + C'U^{n-1}, \tag{2}$$

la seconde devant se déduire de la première en dérivant totalement celle-ci par rapport à u et la première de la seconde en la dérivant par rapport à v.

3. En dérivant totalement l'équation (1) par rapport à u, on obtient

$$-B'V^{n+1} = (A_n - h_{n+1})U^n + [B'(\log B'K^n)_u + C]V^n + Ah_nU^{n-1}$$
$$+ [C_u + C(\log K^{n-1})_u]V^{n-1}$$

Le terme en V^{n-1} doit disparaître, donc on a

$$CK^{n-1} = \psi(v),$$

$\psi(v)$ étant une fonction de la variable v seule. On peut choisir la variable v de manière à avoir $2\psi(v) = 1$, d'où

$$C = \frac{1}{2K^{n-1}}.$$

En identifiant l'équation précédente à l'équation (2), on a

$$-B' = \frac{A_u - h_{n+1}}{A'} = \frac{B'(\log B'K^n)_u + C}{B} = \frac{Ah_n}{C'}. \tag{3}$$

En dérivant totalement l'équation (2) par rapport à v et en choisissant convenablement la variable u, on obtient de même,

$$C' = \frac{1}{2H^{n-1}}.$$

$$-A' = \frac{A'(\log A'H^n)_v + C'}{A} = \frac{B_v - k_{n+1}}{B'} = \frac{Bk_n}{C}. \qquad (4)$$

Des relations (3) et (4), on déduit

$$B'C' + Ah_n = 0, \; B' = -2AH^n$$

$$A'C + Bk_n = 0, \; A' = -2BK^n.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$2AK^{n-1}(U^n - 2H^nV^n) + V^{n-1} - 2K^{n-1}U^{n+1} = 0 \qquad (5)$$

et l'équation (2),

$$2BH^{n-1}(V^n - 2K^nU^n) + U^{n-1} - 2H^{n-1}V^{n+1} = 0. \qquad (6)$$

Le point P étant l'intersection des droites U^nV^n et $U^{n+1}V^{n-1}$, on posera

$$P = U^n - 2H^nV^n, \; \bar{P} = -2AK^{n-1}P = V^{n-1} - 2K^{n-1}U^{n+1}.$$

On aura de même

$$Q = V^n - 2K^nU^n, \; \bar{Q} = -2BH^{n-1}Q = U^{n-1} - 2H^{n-1}V^{n+1}.$$

Des équations (3) et (4), on déduit certaines relations auxquelles doivent satisfaire A et B. Nous ne nous en occuperons pas pour le moment.

4. Les points P et Q sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Nous désignerons par P^1, P^2, ... les transformés successifs de Laplace de P dans le sens des v et par Q^1, Q^2, ... ceux de Q dans le sens des u. Nous avons ainsi une suite de Laplace M,

$$\ldots, P^n, \ldots, P^1, P, Q, Q^1, \ldots, Q^n, \ldots \qquad (M)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Le réseau (U^n) étant conjugué à la congruence (PQ), la suite L est inscrite dans la suite M. Le point P^1 appartient à la droite $V^{n-1}U^{n+1}$, le point P^2 à la droite $V^{n-2}U^{n+2}$, ..., le point P^i à la droite $V^{n-i}U^{n+i}$. Le point Q appartient à la droite $U^{n-1}V^{n+1}$, le point Q^1 à la droite $U^{n-2}V^{n+2}$, ..., le point Q^i à la droite $U^{n-i-1}V^{n+i+1}$.

Le réseau (V^n) étant également conjugué à la congruence (PQ), la suite L est une seconde fois inscrite dans la suite M. Le point Q^1 appartient à la droite $U^{n-1}V^{n+1}$, le point Q^2 à la droite $U^{n-2}V^{n+2}$, ..., le point Q^i à la droite $U^{n-i}V^{n+i}$. Le point P appartient à la droite $V^{n-1}U^{n+1}$, le point P^1 à la droite $V^{n-2}U^{n+2}$, ..., le point P^i à la droite $V^{n-i-1}U^{n+i+1}$.

Donc, *la suite* L *est doublement inscrite dans la suite* M.

5. Les réseaux (U^n), (V^n) étant conjugués à la congruence (PQ), les transformés de Laplace de U^n, V^n dans le sens des u, c'est-à-dire les points U^{n+1}, V^{n+1}, appartiennent à la droite QQ^1, donc le transformé de Laplace de P dans le sens des u appartient à la droite $U^{n-1}V^{n+1}$. On a

$$P_u = h_n(U^{n-1} - H^{n-1}V^{n-1}) - 2H^n \, (\log\, H^nK^n)_u V^n,$$

c'est-à-dire

$$P_u = h_n\overline{Q}, \quad (H^nK^n)_u = 0.$$

De même, le transformé de Laplace de Q dans le sens des v appartient à la droite $V^{n-1}U^{n+1}$ et on a

$$Q_v = k_n\overline{P} - 2K^n \, (\log.\, H^nK^n)_v U^n,$$

d'où

$$Q_v = k_n\overline{P}, \quad (H^n, V^n)_v = 0.$$

Il en résulte que H^nK^n est une constante que nous désignerons par θ.

Le transformé de Laplace de P dans le sens des u coïncide avec Q et celui de Q dans le sens des v avec P. On a

$$\overline{P}_u - \overline{P} \, (\log\, K^{n-1})_u = V^n - 2K^{n-1}h_{n+1}U^n = V^n - 2K^nU^n = Q,$$

$$\overline{Q}_v - \overline{Q} \, (\log\, H^{n-1})_v = U^n - 2H^{n-1}k_{n+1}V^n = V^n - 2H^nV^n = P,$$

donc

$$h_{n+1} = k_n, \;\; k_{n+1} = h_n.$$

6. Le transformé de Laplace de P dans le sens des v appartient à la droite $V^{n-1}U^{n+2}$, donc

$$P^1 = P_v - P \, (\log\, H^n)_v = U^{n+1} - 2H^nk_nV^{n+1}$$

et comme $k_n = h_{n+1}$,

$$\mathrm{P}^1 = \mathrm{U}^{n+1} - 2\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{V}^{n-1}.$$

Le transformé de Laplace de $\overline{\mathrm{P}}$ dans le sens des v appartient à la droite $\mathrm{V}^{n-2}\mathrm{U}^{n+2}$, donc on a

$$\overline{\mathrm{P}}_v = k_{n-1}(\mathrm{V}^{n-2} - 2\mathrm{K}^{n-2}\mathrm{U}^{n+2}) - 2\mathrm{K}^{n-1}(\log \mathrm{K}^{n-1}\mathrm{H}^{n+1})_v\mathrm{U}^{n+1}$$

et comme $\mathrm{K}^{n-1}\mathrm{H}^{n+1} = \mathrm{H}^n\mathrm{K}^n$ est une constante,

$$\overline{\mathrm{P}}^1 = \mathrm{V}^{n-2} - 2\mathrm{K}^{n-2}\mathrm{U}^{n+2}.$$

On voit que l'on a

$$\mathrm{P}^1_u = h_{n+1}\mathrm{P}.$$

D'autre part, on a

$$\overline{\mathrm{P}}^1_u = \overline{\mathrm{P}}^1 (\log \mathrm{K}^{n-2})_u = \mathrm{V}^{n+1} - 2\mathrm{K}^{n-2}h_{n+1}\mathrm{U}^{n+1}.$$

Observons que l'on a

$$h_{n+2} = -(\log \mathrm{H}^n)_{uv} - (\log h_{n+1})_{uv} + h_{n+1},$$

$$k_n = -(\log \mathrm{K}^n)_{uv} + (\log k_n)_{uv} + k_{n-1},$$

d'où par addition

$$h_{n+2} + k_n = -(\log h_{n+1})_{uv} + (\log k_n)_{uv} + h_{n+1} + k_{n-1}.$$

Puisque $h_{n+1} = k_n$, on a $h_{n+2} = k_{n-1}$ et

$$\overline{\mathrm{P}}^1_u - \overline{\mathrm{P}}^1 (\log \mathrm{K}^{n-2})_u = \overline{\mathrm{P}}.$$

7. Des relations précédentes, on déduit que P doit satisfaire à l'équation de Laplace

$$\mathrm{P}_{uv} - \mathrm{P}_u (\log \mathrm{H}^n)_v - h_n\mathrm{P} = 0. \tag{7}$$

On a de même

$$\overline{\mathrm{P}}_{uv} - \overline{\mathrm{P}}_v (\log \mathrm{K}^{n-1})_u - h_{n-1}\overline{\mathrm{P}} = 0. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) doivent être équivalentes sous la condition

$$2\Lambda\mathrm{K}^{n-1}\mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}} = 0.$$

Avant de vérifier ce point, nous examinerons les conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités A et B en vertu des équations (3) et (4) en tenant compte des conditions obtenues ultérieurement.

En égalant les second et troisième rapports de la relation (3), on obtient

$$(1 - 4\theta)\mathrm{A}_u = h_{n+1} - k_n = 0.$$

$1 - 4\theta$ ne peut être nul, car autrement les points P et Q coïncideraient. On a donc $\mathrm{A}_u = 0$. Les deux premiers rapports de (3) donnent

$$4\mathrm{AB}\theta = h_{n+1}.$$

On trouve de même $\mathrm{B}_v = 0$ et

$$4\mathrm{AB}\theta = k_{n+1}.$$

On a donc les conditions

$$\mathrm{A}_u = 0, \quad \mathrm{B}_v = 0, \quad 4\mathrm{AB}\theta = h_{n+1} = k_{n+1} = h_n = k_n. \tag{9}$$

Les réseaux (U^n), (V^n) sont à invariants égaux.

On a en outre

$$(\log \mathrm{H}^n)_{uv} = 0, \ (\log \mathrm{K}^n)_{uv} = 0.$$

En posant $\overline{\mathrm{P}} = - 2\mathrm{AK}^{n-1}\mathrm{P}$, l'équation (8) devient

$$\mathrm{P}_{uv} + \mathrm{P}_u (\log \mathrm{AK}^{n-1})_v$$
$$+ [(\log \mathrm{K}^{n-1})_u(\log \mathrm{AK}^{n-1})_v - (\log \mathrm{K}^{n-1})_{uv} - k_{n-1}]\mathrm{P} = 0,$$

le coefficient du terme en P_v étant identiquement nul.

De la dernière des équations (9), on déduit

$$(\log \mathrm{A})_v = (\log \mathrm{K}_n)_v.$$

Le coefficient de P_u est donc

$$(\log \mathrm{AK}^{n-1})_v = (\log \mathrm{K}^n)_v - (\log \mathrm{H}^n)_v.$$

Le coefficient de P s'écrit

$$(\log \mathrm{K}^{n-1})_u \ (\log \mathrm{K}^n)_v - h_{n+1}$$

et on doit donc avoir

$$(\log \mathrm{K}^n)_v = 0.$$

8. Les points Q et $\bar{Q}$ satisfont aux équations de Laplace

$$Q_{uv} - Q_v \ (\log \ K^n)_u - k_n Q = 0,$$

$$\bar{Q}_{uv} - \bar{Q}_u \ (\log \ H^{n-1})_v - h_{n-1}\bar{Q} = 0.$$

Ces équations doivent être identiques moyennant

$$\bar{Q} + 2BH^{n-1}Q = 0.$$

et

$$(\log \ H^n)_u = 0.$$

Nous avons obtenu plus haut les conditions

$$(H^n K^n)_u = 0, \quad (H^n K^n)_v = 0,$$

donc nous avons

$$H^n_u = 0, \quad K^n_u = 0, \quad H^n_v = 0, \quad K^n_v = 0$$

et les quantités H^n, K^n sont des constantes.

Liège, le 8 avril 1966.