Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces-base de certains systèmes linéaires d'hyperquadriques

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Étude de la surface d'un espace linéaire à n dimensions intersection d'une variété représentée par l'égalité à zéro d'une matrice à deux lignes et m colonnes de formes linéaires et d'un certain nombre d'hyperquadriques. Cas particulier d'une surface dont le système canonique possède une composante fixe non rationnelle.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces-base de certains systèmes linéaires d'hyperquadriques

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude de la surface d'un espace linéaire à n dimensions intersection d'une variété représentée par l'égalité à zéro d'une matrice à deux lignes et m colonnes de formes linéaires et d'un certain nombre d'hyperquadriques. Cas particulier d'une surface dont le système canonique possède une composante fixe non rationnelle.

Diverses recherches nous ont conduit à considérer des surfaces hyperspatiales appartenant à des hyperquadriques. Cette note est une contribution à l'étude de surfaces de cette nature.

Nous considérons, dans un espace linéaire S_n à n dimensions, la variété V d'ordre m représentée par l'évanouissement d'une matrice à deux lignes et m colonnes de formes linéaires par rapport aux coordonnées ponctuelles de S_n. Nous supposons que cette variété n'est pas conique, ce qui implique $n \leqslant 2m - 1$. Nous considérons alors la surface F intersection de la variété V et de $n - m - 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes.

Nous commençons par étudier la variété V. Pour $n = 2m - 1$, cette variété est le lieu des droites joignant les points homologues de deux espaces linéaires homographiques à $m - 1$ dimensions. Nous étudions ensuite la variété V lorsque $n = 2m - 2$. Cette variété contient un faisceau d'espaces linéaires à $m - 2$ dimensions. Ces espaces rencontrent une variété lieu des droites joignant les points homologues de deux espaces homographiques à $m - 3$ dimensions suivant des espaces linéaires à $m - 3$ dimensions, variété qui joue un rôle analogue à une droite directrice d'une surface réglée rationnelle. Pour $m = 3$ et $n = 4$, cette variété se réduit d'ailleurs à la directrice d'une surface cubique rationnelle. Les cas où n est inférieur à $2m - 2$ se traitent en considérant les intersections de la variété précédente par les espaces linéaires considérés.

Nous déterminons le genre de la courbe commune à la variété V et à $n - m$ hyperquadriques, puis nous considérons la surface F commune à la variété V et à $n - m - 1$ hyperquadriques. Dans le cas où $n = m + 4$, on obtient une surface dont le système canonique contient une composante fixe non rationnelle et $m - 6$ courbes d'un faisceau linéaire de courbes de genre cinq.

1. Considérons les équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_m \end{matrix} \right\| = 0, \tag{1}$$

où les φ et les ψ sont des fonctions linéaires de $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, linéairement indépendantes. Dans l'espace S_n, dont les x sont les coordonnées ponctuelles, ces équations représentent une variété V^m_{n-m+1} d'ordre m à $n - m + 1$ dimensions, base d'un système linéaire de dimension $\frac{1}{2}m(m-1) - 1$ d'hyperquadriques.

La variété V^m_{n-m+1} est le lieu des espaces linéaires à $n - m$ dimensions d'équations

$$\varphi_1 = \mu\psi_1, \quad \varphi_2 = \mu\psi_2, \quad \dots, \quad \varphi_m = \mu\psi_m \tag{2}$$

Les équations

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_m\varphi_m = 0,$$
$$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \dots + \lambda_m\psi_m = 0$$

représentent deux gerbes projectives d'hyperplans G, G' ayant respectivement pour base des espaces σ_{n-m}, σ'_{n-m} à $n - m$ dimensions.

La variété V^m_{n-m+1} est le lieu des points communs aux espaces à $n - m$ dimensions

$$\frac{\varphi_1}{\mu_1} = \frac{\varphi_2}{\mu_2} = \dots = \frac{\varphi_m}{\mu_m},$$

$$\frac{\psi_1}{\mu_1} = \frac{\psi_2}{\mu_2} = \dots = \frac{\psi_m}{\mu_m}$$

qui se correspondent dans l'homographie H entre les gerbes G, G'.

Pour $n = m$, la variété considérée est une courbe d'ordre m.

Pour $n = 2m - 1$, on peut considérer les φ et les ψ comme les coordonnées de l'espace S_{2m-1} et on a une variété V_m^m. Il en résulte que pour $n > 2m - 1$, la variété considérée est un cône, cas que nous exclurons.

Dans la suite, nous supposerons $m < n < 2m$.

2. Commençons par considérer le cas $n = 2m - 1$.

Dans ce cas les gerbes G et G' ont pour bases deux espaces σ_{m-1}, σ'_{m-1} à $m - 1$ dimensions et les espaces à m dimensions ξ_m passant par σ_{m-1} et ξ'_m passant par σ_{m-1} qui se correspondent dans H se coupent suivant une droite a. Ces couples d'espaces ξ_m, ξ'_m sont en nombre ∞^{m-1} et le lieu des droites a est une variété V_m^m passant par σ_{m-1}, σ'_{m-1}.

Observons qu'un espace ξ_m coupe σ'_{m-1} en un point A' et que l'espace ξ'_m correspondant coupe σ_{m-1} en un point A. Il en résulte que les points A et A' se correspondent dans une homographie entre les espaces σ_{m-1} et σ'_{m-1}. La droite a passe par A et A', donc :

Dans l'espace S_{2m-1}, la variété V_m^m est le lieu des droites joignant les points homologues de deux espaces linéaires projectifs.

On remarquera d'ailleurs que dans le cas considéré, les équations (2) sont celles d'une homographie entre les espaces σ_{m-1}, σ'_{m-1}.

3. Supposons maintenant $n < 2m - 1$.

Observons que si $n = 2m - 2$, les gerbes G, G' ont pour base des espaces σ_{m-2}, σ'_{m-2} à $m - 2$ dimensions et les espaces ξ_{m-1} passant par σ_{m-2} et ξ'_{m-1} passant par σ_{m-2} homologues dans H se coupent en un point dont le lieu est la variété V_{m-1}^m.

Par contre, si $n < 2m - 2$, en posant $n = 2m - k$ $(k > 2)$, les gerbes G, G′ ont pour bases des espaces σ_{m-k}, σ'_{m-k} à $m - k$ dimensions et les espaces ξ_{m-k+1}, ξ'_{m-k+1} à $m - k + 1$ dimensions des gerbes G, G′ ne se rencontrent pas en général, même s'ils se correspondent dans l'homographie H.

Nous allons pour cette raison traiter à part le cas $n = 2m - 2$. Rappelons que la variété V^m_{m-1} est le lieu de ∞^1 espaces α_{m-2} à $m - 2$ dimensions, formant un faisceau.

Appelons ξ les hyperplans passant par σ_{m-2} et ξ' les hyperplans passant par σ'_{m-2}. Un hyperplan ξ et son homologue ξ' dans H se rencontrent suivant un espace S_{2m-4} à $2m-4$ dimensions. L'hyperplan ξ rencontre σ'_{m-2} suivant un espace $\overline{\sigma}'_{m-3}$ à $m - 3$ dimensions et ξ' rencontre σ_{m-2} suivant un espace $\overline{\sigma}'_{m-3}$ à $m - 3$ dimensions. Ces espaces $\overline{\sigma}_{m-3}$, $\overline{\sigma}'_{m-3}$ appartiennent à l'espace S_{2m-4} et dans cet espace, les espaces à $m - 2$ dimensions $\overline{\xi}$ passant par σ_{m-3} et $\overline{\xi}'$ passant par σ'_{m-3} forment deux gerbes $\overline{G}$, $\overline{G}'$ entre lesquelles H détermine une homographie. Les espaces homologues $\overline{\xi}$, $\overline{\xi}'$ se rencontrent en un point qui engendre une variété V^{m-1}_{m-2} car si dans les données, on remplace m par $m - 1$, on retrouve le cas examiné ici.

La section de la variété V^m_{m-1} par un espace commun à deux hyperplans homologues des gerbes G, G′ est une variété V^{m-1}_{m-2}.

4. Les espaces-base des gerbes G, G′, σ_{m-2} et σ'_{m-2}, appartiennent à une hyperplan σ_{2m-3}.

Soit η l'hyperplan de G que H fait correspondre à σ_{2m-3} considéré comme appartenant à G′ et η' l'hyperplan de G′ qui correspond à σ_{2m-3} considéré comme appartenant à G.

Aux espaces S_{m-1} de G appartenant à η correspondent des espaces S'_{m-1} appartenant à σ_{2m-3}, donc les intersections de ces espaces appartiennent à σ_{2m-3}.

Les espaces S_{m-1} de η coupent σ_{2m-3} suivant ∞^{m-3} espaces S_{m-2} et à ces espaces correspondent ∞^{m-3} espaces S'_{m-2} de G′ situés dans σ_{2m-3}. Les espaces S_{m-2}, S'_{m-2} engendrent des gerbes homographiques et les espaces homologues se coupent suivant des droites engendrant une variété V^{m-2}_{m-2} d'ordre $m - 2$, à $m - 2$ dimensions.

Appelons σ_{2m-5} l'espace à $2m - 5$ dimensions commun aux hyperplans σ_{2m-3}, η, η'. On peut remarquer que les droites communes à deux espaces homologues S_{m-2}, S'_{m-2} appartiennent à η et à η', donc à σ_{2m-5} et par conséquent la variété V_{m-2}^{m-2} appartient à cet espace.

L'espace σ_{2m-5} coupe σ_{m-2} et σ'_{m-2} suivant des espaces σ_{m-3}, σ'_{m-3} à $m - 3$ dimensions appartenant le premier à η', le second à η. Il résulte de la projectivité entre les gerbes G, G' que les espaces σ_{m-3}, σ'_{m-3} sont homographiques et que la variété V_{m-2}^{m-2} est le lieu des droites joignant les points homologues de ces espaces.

Notons que la variété V_{m-2}^{m-2} contient ∞^1 espaces linéaires à $m - 2$ dimensions formant un faisceau.

Les bases σ_{m-2}, σ'_{m-2} *de* G *et* G' *appartiennent à un hyperplan* σ_{2m-3} *qui coupe la variété* V_{m-1}^{m} *en dehors de* σ_{m-2}, σ'_{m-2} *suivant une variété* V_{m-2}^{m-2} *d'ordre* m $-$ 2 *qui appartient à l'espace* σ_{2m-5} *commun à* σ_{2m-3} *et aux deux hyperplans de* G, G' *que* H *fait correspondre à* σ_{2m-3}.

5. Soit ξ un hyperplan de G contenant σ_{2m-5} ; son homologue ξ' de G' contient également l'espace σ_{2m-5} et l'espace à $2m - 4$ dimensions commun à ξ et ξ' rencontre V_{m-1}^{m} suivant une variété d'ordre $m - 1$ contenant V_{m-2}^{m-2} et complétée par un espace linéaire α_{m-2} à $m - 2$ dimensions. Comme les espaces ξ forment un faisceau, on obtient ainsi le faisceau des espaces α_{m-2}.

Notons que σ_{2m-5} étant un hyperplan de l'espace à $2m - 4$ dimensions considéré, les espaces α_{m-2} coupent V_{m-2}^{m-2} suivant des espaces à $m - 3$ dimensions.

Les espaces à 2m $-$ 4 *dimensions passant par* σ_{2m-5}, *intersections de deux hyperplans homologues des gerbes* G, G', *rencontrent la variété* V_{m-1}^{m} *suivant les espaces* α_{m-2} *qui rencontrent à leur tour la variété* V_{m-2}^{m-2} *suivant des espaces à* m $-$ 3 *dimensions formant un faisceau linéaire.*

Considérons maintenant deux hyperplans ξ, $\overline{\xi}$ de G passant par σ_{2m-5} et leurs homologues ξ, $\overline{\xi}'$ de G'. Les espaces (ξ, ξ') et $(\overline{\xi}, \overline{\xi}')$ contiennent respectivement des espaces α_{m-2} et $\overline{\alpha}_{m-2}$.

Les espaces à $2m - 4$ dimensions $(\xi, \bar{\xi})$ et $(\xi, \bar{\xi}')$ appartiennent à un hyperplan passant par σ_{2m-5} et contenant α_{m-2} et $\bar{\alpha}_{m-2}$.

Un hyperplan passant par σ_{2m-5} coupe encore la variété V_{m-1}^m suivant deux espaces du faisceau $|\alpha_{m-2}|$.

Pour $m = 3$, la variété V_{m-1}^m devient la réglée cubique V_2^3 de S_4, l'espace σ_{2m-5} devient une droite et la variété V_{m-2}^{m-2} coïncide avec cette droite, qui est la directrice de la surface réglée. On voit donc que dans le cas général, la variété V_{m-2}^{m-2} joue, pour la variété V_{m-1}^m le même rôle qu'une directrice rectiligne pour une surface réglée rationnelle.

6. Passons maintenant à l'étude d'une variété V_{m-k}^m située dans un espace S_{2m-1-k} à $2m - 1 - k$ dimensions $(1 < k < m - 1)$.

Les gerbes G et G' ont pour bases respectivement des espaces σ_{m-k-1}, σ'_{m-k-1} à $m - k - 1$ dimensions. Les espaces à $m - k$ dimensions homologues de ces deux gerbes ne se rencontrent pas en général et les points communs à ceux qui se rencontrent engendrent la variété V_{m-k}^m.

Plongeons l'espace S_{2m-k-1} dans un espace S_{2m-2} à $2m - 2$ dimensions et dans cet espace, considérons deux espaces σ_{m-2}, σ'_{m-2} à $m - 2$ dimensions coupant S_{2m-k-1} suivant les espaces σ_{m-k-1}, σ'_{m-k-1} respectivement.

L'homographie H entre les gerbes G, G' détermine une homographie entre les gerbes de sommets σ_{m-2}, σ'_{m-2} et les points communs aux espaces à $m - 1$ dimensions homologues de ces deux gerbes engendrent une variété V_{m-1}^m dont V_{m-k}^m est la section par S_{2m-k-1}.

La variété V_{m-k}^m est la section de la variété V_{m-1}^m par un espace à 2m - k — 1 diensions.

On pourrait d'ailleurs établir de la même façon que la variété V_{m-1}^m est la section de la variété V_m^m par un espace à $2m - 2$ dimensions.

Il convient d'examiner de plus près la section de la variété V_{m-2}^{m-2} par l'espace S_{2m-k-1}.

L'espace σ_{2m-k-1} qui contient la variété V_{m-2}^{m-2} coupe les bases σ_{m-k-1}, σ'_{m-k-1} des gerbes G, G' suivant des espaces à $m - k - 2$

dimensions homographiques et les droites qui joignent les points homologues de ces deux espaces engendrent une variété V^{m-k-1}_{m-k-1} qui appartient à la section de la variété V^{m-2}_{m-2} par l'espace S_{2m-k-1}. La variété V^{m-k-1}_{m-k-1} contient un faisceau d'espaces linéaires α_{m-k-2} qui sont découpés par les espaces σ_{m-k-1} de la variété V^m_{m-k}.

La variété V^{m-k-1}_{m-k-1} appartient à une espace à $2m - 2k - 3$ dimensions et par cet espace passent ∞^{k+1} hyperplans de S_{2m-k-1}. Un de ces hyperplans passant par un point d'un espace α_{m-k-1} n'appartenant pas à V^{m-k-1}_{m-k-1} contient cet espace. On en conclut que :

Les hyperplans passant par la variété V^{m-k-2}_{m-k-1} coupent encore V^m_{m-k} suivant k + 1 *espaces α_{m-k-1}.*

7. *Courbe commune à une variété V^m_{m-k} d'un espace à* 2m − k − 1 *dimensions et à* m − k − 1 *hyperquadriques.* — Nous désignerons une telle courbe par C_{m-k-1} et son genre par p_{m-k-1} Rappelons que l'on a $0 \leq k \leq m - 1$.

Si $k = m - 1$, la variété V^m_1 est une courbe rationnelle normale de S_m et on a $p_0 = 0$.

Si $k = m - 2$, la variété V^m_2 est une surface réglée de S_{m+1} et la courbe C_1 est découpée par une hyperquadrique V^2_m, c'est-à-dire par une surface équivalente à deux hyperplans. D'après une formule de Noether, on a

$$p_1 = 2p_0 + m - 1 = m - 1.$$

La courbe C_1 est hyperelliptique.

Si $k = m - 3$, la courbe C_3 est, dans un espace S_{m+2}, l'intersection de la variété V^m_3 et de deux hyperquadriques. On a donc

$$p_2 = 2p_1 + 2m - 1 = 4m - 3.$$

Si $k = m - 4$, un raisonnement analogue au précédent montre que l'on a

$$p_3 = 2p_2 + 4m - 1 = 3.2^2m - 2^3 + 1.$$

Si $k = m - 5$, on a de même

$$p_4 = 4.2^3m - 2^4 + 1.$$

On est conduit à poser

$$p_{m-k-1} = m(m-k-1)2^{m-k-2} - 2^{m-k-1} + 1.$$

On vérifie que l'on a identiquement

$$p_{m-k-1} = 2p_{m-k-2} + 2^{m-k-2}m - 1.$$

La courbe de l'espace S_{2m-k-1} *intersection de la variété* V^m_{m-k} *et de* m − k − 1 *hyperquadriques linéairement indépendants est de genre* $m(m-k-1)2^{m-k-2} - 2^{m-k-1} + 1$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$.

On observera que la formule est encore applicable lorsque k est négatif, à condition que l'intersection des $m-k-1$ hyperquadriques ne rencontre pas le sommet (espace à $m-k-2$ dimensions) du cône V^m_{m-k}.

La courbe C_{m-k-1} appartient à $\frac{1}{2}m(m-1) + m - k - 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes.

8. *Surface commune à une variété* V^m_{m-k} *d'un espace à* 2m − k − 1 *dimensions et à* m − k − 2 *hyperquadriques.* — Désignons par F la surface.

La variété V^m_{m-k} de S_{2m-k-1} contient un faisceau d'espaces linéaires α_{m-k-1} et un espace S_{2m-k-3} commun à deux hyperplans homologues des gerbes G, G' la coupe suivant une variété V^{m-1}_{m-k-1}. Il existe une telle variété dans chacun des hyperplans d'une gerbe G, G' donc ces variétés sont au nombre de ∞^{m-1} et forment un système linéaire $|V^{m-1}_{m-k-1}|$.

Une section hyperplane de V^m_{m-k} est une variété V^m_{m-k-1} et on a

$$V^m_{m-k-1} \equiv V^{m-1}_{m-k-1} + \alpha_{m-k-1}.$$

Retournons à la surface F et désignons par K les courbes découpées sur les espaces α_{m-k-1} par les $m-k-2$ hyperquadriques, par H celles qui sont découpées sur les variétés V^{m-1}_{m-k-1}, enfin par C les sections hyperplanes. Nous avons

$$C \equiv H + K.$$

La courbe K, intersection de $m-k-2$ hyperquadriques dans un espace à $m-k-1$ dimensions, est d'ordre 2^{m-k-2}

et de genre $(m-k-4)2^{m-k-3}+1$ [1]. Les adjointes sont les variétés d'ordre $(m-k-4)$ de l'espace S_{m-k-2} et découpent sur K la série canonique complète.

L'espace α_{m-k-1} et la variété V^{m-1}_{m-k-1} appartenant à un même hyperplan ont en commun un espace à $m-k-2$ dimensions rencontré en 2^{m-k-2} points par les $m-k-2$ hyperquadriques, donc une courbe H et une courbe K ont en commun 2^{m-k-2} points formant sur K un groupe de la série canonique. De ce qui précède, on déduit que l'adjoint à $|K|$ est

$$|K'| = |(m-k-4)H|.$$

Le genre de la courbe H est d'après la formule établie plus haut,

$$(m-1)(m-k-2)2^{m-k-3}-2^{m-k-2}+1.$$

On peut calculer celui des sections hyperplanes C de F de deux manières, soit en appliquant la formule du n° 7, soit en considérant C comme somme des courbes H et K. On trouve pour la valeur de ce genre

$$m(m-k-2)2^{m-k-3}-2^{m-k-2}+1.$$

D'après ce qui a été établi plus haut, on a

$$V^{m}_{m-k-1} = V^{m-k-1}_{m-k-1} + (k+1)\alpha_{m-k-1},$$

ce qui donne, sur la surface F, en désignant par L la courbe section de la variété V^{m-k-1}_{m-k-1} par les $m-k-2$ hyperquadriques,

$$C = L + (k+1)K.$$

On en déduit

$$H = L + kK.$$

Le système canonique de F *est*

$$|(m-k-5)H + (k-1)K + L|.$$

Le genre de la courbe L, d'ordre $(m-k-1)2^{m-k-2}$, est, d'après la formule du n° 7,

$$(m-k-1)(m-k-2)2^{m-k-3}-2^{m-k-2}+1.$$

[1] Sur les courbes et les surfaces intersections d'hyperquadriques (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1914, pp. 262-269).

9. Examinons de plus près le cas $k = m - 5$. La variété V_5^m est alors située dans un espace S_{m+4} à $m + 4$ dimensions. Son système canonique est

$$| L + (m - 6)K |$$

et comme $K' = H$, il est aussi représenté par $| H - K |$.

Les courbes K sont d'ordre huit et de genre cinq. Les courbes H sont d'ordre $8m$ et découpent sur une courbe K la série canonique complète g_8^4. Le système $| H |$ a la dimension $m - 1$, par conséquent il y a ∞^{m-6} courbes H contenant une courbe K et le système canonique de F a la dimension $m - 6$. La surface F a donc le genre géométrique $p_g = m - 5$.

Revenons à la première forme du système canonique. Une courbe canonique contient $m - 6$ courbes du faisceau $| K |$ et ces groupes de courbes sont au nombre de $m - 5$ linéairement indépendants. Il en résulte que la courbe L est une composante fixe du système canonique.

La courbe L, d'ordre 32, a le genre 41. Elle est tracée sur une variété V_4^4 située dans un espace S_7 à sept dimensions. Cette variété contient un faisceau linéaire d'espace à trois dimensions.

Dans un espace S_{m+4} *à* m + 4 *dimensions, la surface section de la variété* V_5^m *par trois hyperquadriques possède un système canonique ayant une partie fixe de genre* 41 *et une partie variable formée de* m — 6 *courbes d'un faisceau linéaire de courbes de genre cinq.*

La surface appartient à $\frac{1}{2} m(m - 1) + 3$ hyperquadriques linéairement indépendantes.

Liège, le 18 novembre 1966.