Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces contenant une involution non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique et contenant une involution de genres Pa = Pg = 0, non rationnelle, sans faire d'hypothèse sur la surface image de cette involution. Les surfaces considérées ont comme système des sections hyperplanes le système tétracanonique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces contenant une involution non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique et contenant une involution de genres $p_a = p_g = 0$, non rationnelle, sans faire d'hypothèse sur la surface image de cette involution. Les surfaces considérées ont comme système des sections hyperplanes le système tétracanonique.

Dans deux notes récentes [1], nous avons utilisé la construction suivante : Soit Φ une surface dont le diviseur de Severi est égal à deux et soient $|\Gamma|$, $|\overline{\Gamma}|$ deux systèmes linéaires de dimension $r \geqslant 3$, simples, dont les doubles sont équivalents. Considérons un espace linéaire S_{2r+1} à $2r+1$ dimensions et dans cet espace, deux espaces linéaires σ, $\overline{\sigma}$ à r dimensions ne se rencontrant pas. Dans σ nous supposons exister une transformée birationnelle de Φ, que nous désignerons toujours par Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ et dans $\overline{\sigma}$, une transformée birationnelle $\overline{\Phi}$ de Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes $\overline{\Gamma}$. Soit V_3 la variété lieu des droites joignant les points homo-

(1) Construction d'une surface à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1966, pp. 1058-1063).

Construction d'une surface à sections hyperplanes tricanoniques possédant une seule courbe canonique (*Idem*, pp. 1200-1205).

logues des surfaces Φ et $\overline{\Phi}$. S'il existe une hyperquadrique Q de S_{2r+1} rencontrant les surfaces Φ et $\overline{\Phi}$ suivant des courbes homologues, dans l'intersection de V_3 et de cette hyperquadrique se trouve une surface F contenant une involution du second ordre, privée de points unis, dont la surface Φ est une image.

Dans les deux notes citées, nous avons appliqué la construction précédente au cas où la surface Φ a les genres $p_a = p_g = 0$ et possède un système bicanonique irréductible, de dimension au moins égale à deux. Dans la première note, nous avons pris pour $|\Gamma|$ le système bicanonique de Φ et pour avoir une hyperquadrique Q, nous avons dû supposer le genre linéaire de la surface supérieur à 4 et le système bicanonique simple. Dans la seconde note, nous avons pris pour $|\Gamma|$ le système tricanonique et à condition qu'il soit simple, la construction s'applique aux cas où le genre linéaire est égal à 3 ou 4.

Dans cette note, nous prenons pour système $|\Gamma|$ le système tétracanonique et nous montrons, à la fin de la note, qu'il est toujours simple, hypothèse dont nous affranchissons donc notre construction.

Nous croyons d'ailleurs que la considération du modèle tétracanonique de la surface Φ permettra probablement d'arriver à la classification de ces surfaces.

1. Soit Φ une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un système bicanonique irréductible, de bigenre $P_2 = p^{(1)} = \pi > 2$. Rappelons que la surface Φ contient une courbe Γ de genre π et de degré virtuel $\pi - 1$ et que le système bicanonique contient le double de cette courbe sans que celle-ci soit une courbe canonique [1].

$$|\Gamma_2| = |2\Gamma|, \quad |\Gamma_3| = |\Gamma + \Gamma'|, \quad |\Gamma_4| = |4\Gamma|, \ldots,$$

D'une manière générale, on a

$$|\Gamma_{2n}| = |2n\Gamma|, \quad |\Gamma_{2n+1}| = |(2n-1)\Gamma + \Gamma'|.$$

[1] Voir notre mémoire : Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1965, pp. 25-41).

La surface a le diviseur de Severi $\sigma = 2$ et à côté des systèmes pluricanoniques, on a les systèmes

$$|\overline{\Gamma}_2| = |\Gamma'|, \quad |\overline{\Gamma}_3| = |3\Gamma|, \quad |\overline{\Gamma}_4| = |2\Gamma + \Gamma'|, \ldots,$$

et d'une manière générale

$$|\overline{\Gamma}_{2n}| = |(2n-2)\Gamma + \Gamma'|, \quad |\overline{\Gamma}_{2n+1}| = |(2n+1)\Gamma|,$$
$$|\overline{\Gamma}'_{2n}| = |\overline{\Gamma}_{2n+2}|, \quad |\overline{\Gamma}'_{2n+1}| = |\overline{\Gamma}_{2n+2}|.$$

On a d'ailleurs

$$2\Gamma_{2n} \equiv 2\overline{\Gamma}_{2n}, \quad 2\Gamma_{2n+1} \equiv 2\overline{\Gamma}_{2n+1},$$
$$2\Gamma' \equiv 4\Gamma, \quad \Gamma'' \equiv 3\Gamma.$$

Les plurigenres sont donnés par

$$P_n = \frac{1}{2}n(n-1)(\pi-1)+1$$

et le système n-canonique a le genre et le degré respectivement égaux à

$$\frac{1}{2}n(n+1)(\pi-1)+1, \quad n^2(\pi-1).$$

Le système $|\overline{\Gamma}_n|$ a les mêmes caractères.

Pour abréger, nous poserons dans la suite $\nu = \pi - 1$.

2. Supposons que le système tétracanonique soit simple, ce qui sera démontré à la fin de la note. Rapportons projectivement ses courbes Γ_4 aux hyperplans d'un espace $S_{6\nu}$ à $6\nu = 6(\pi-1)$ dimensions. Nous obtenons une surface Φ d'ordre 16ν dont les sections hyperplanes sont de genre $10\nu+1$.

Sur cette surface, la courbe Γ est d'ordre 4ν et les hyperplans découpent sur cette courbe une série linéaire de dimension $3\nu-1$, donc la courbe Γ appartient à un espace linéaire $\sigma_{3\nu-1}$ à $3\nu-1$ dimensions.

Il existe un hyperplan ayant, avec la surface Φ, un contact du troisième ordre le long de la courbe Γ.

Observons en passant que dans l'espace $\sigma_{3\nu-1}$ il existe $\frac{1}{2}\nu(9\nu-11)$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant la courbe Γ.

3. Sur la surface Φ, les courbes bicanoniques Γ_2 sont des courbes d'ordre 8ν et de genre $3\nu + 1$. Sur une courbe Γ_2 les hyperplans découpent une série de dimension $5\nu - 1$ donc une courbe Γ_2 appartient à un espace linéaire à $5\nu - 1$ dimensions.

Comme on a $\Gamma_4 = 2\Gamma_2$, un hyperplan contenant une courbe Γ_2 découpe encore sur Φ une courbe Γ_2. Par un espace linéaire à $5\nu - 1$ dimensions passent ∞^ν hyperplans, donc les hyperplans contenant une courbe Γ_2 découpent sur Φ le système bicanonique complet. Il en résulte que le long d'une courbe Γ_2 il existe un hyperplan touchant la surface Φ.

En particulier, par l'espace $\sigma_{3\nu-1}$ passe un espace $\sigma_{5\nu-1}$ touchant la surface Φ le long de la courbe Γ et les hyperplans passant par cet espace découpent sur Φ le système bicanonique complet.

Une courbe $\bar{\Gamma}_2$ est sur la surface Φ une courbe d'ordre 8ν et de genre $3\nu + 1$. Une telle courbe appartient également à un espace à $5\nu - 1$ dimensions et les hyperplans passant par une courbe $\bar{\Gamma}_2$ découpent sur Φ le système complet $|\bar{\Gamma}_2|$ car on a

$$2\bar{\Gamma}_2 = 2\Gamma' = 4\Gamma = \Gamma_4.$$

Le long d'une courbe $\bar{\Gamma}_2$, il existe un hyperplan touchant la surface Φ.

4. Les hyperquadriques de l'espace $S_{6\nu}$ découpent sur Φ des courbes 8-canoniques. Le 8-genre de Φ étant $P_8 = 28\nu + 1$ et le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes de $S_{6\nu}$ étant égal à $(3\nu + 1)(6\nu + 1)$, il existe $\nu(18\nu - 19)$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant Φ.

Parmi ces $\nu(18\nu - 19)$ hyperquadriques, il y en a $\frac{1}{2}\nu(9\nu - 11)$ coupant $\sigma_{3\nu-1}$ suivant des hyperquadriques contenant Γ. Les autres contiennent $\sigma_{3\nu-1}$ et sont au nombre de $\frac{27}{2}\nu(\nu - 1)$.

Sur la surface Φ, une courbe $\bar{\Gamma}_4$ est d'ordre 16ν et de genre $10\nu + 1$. Cette courbe appartient à $18\nu^2 - 13\nu + 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes, donc à $6\nu + 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes ne contenant pas Φ. Il en résulte que les hyperquadriques passant par une courbe $\bar{\Gamma}_4$

découpent sur Φ le système $|\overline{\Gamma}_4|$ complet, car on a

$$2\overline{\Gamma}_4 \equiv 4\Gamma + 2\Gamma' \equiv 8\Gamma \equiv \Gamma_8.$$

Par conséquent, le long d'une courbe $\overline{\Gamma}_4$, il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ.

5. Rapportons projectivement les courbes $\overline{\Gamma}_4$ aux hyperplans d'un espace $S'_{6\nu}$ à 6ν dimensions. Nous obtenons une surface $\overline{\Phi}$ d'ordre 16ν à sections hyperplanes de genre $10\nu + 1$.

Sur la surface $\overline{\Phi}$, la courbe Γ, que nous désignerons par $\overline{\Gamma}$, est d'ordre 4ν et appartient à un espace linéaire $\overline{\sigma}_{3\nu-1}$ à $3\nu - 1$ dimensions.

Les courbes Γ_2 et $\overline{\Gamma}_2$ sont d'ordre 8ν et appartiennent à des espaces à $5\nu - 1$ dimensions. Comme on a

$$\Gamma_2 + \overline{\Gamma}_2 \equiv 2\Gamma + \Gamma' \equiv \overline{\Gamma}_4,$$

les hyperplans passant par une courbe Γ_2 découpent sur $\overline{\Phi}$ le système $|\overline{\Gamma}_2|$ complet et les hyperplans passant par une courbe $\overline{\Gamma}_2$ découpent également sur $\overline{\Phi}$ le système $|\Gamma_2|$ complet.

Les hyperquadriques de $S'_{6\nu}$ découpent sur $\overline{\Phi}$ le système 8-canonique ; par conséquent $\overline{\Phi}$ appartient à $\nu(8\nu - 19)$ hyperquadriques linéairement indépendantes et il y a $\frac{1}{2}27\nu(\nu - 1)$ de ces hyperquadriques qui contiennent l'espace $\overline{\sigma}_{3\nu-1}$.

Les hyperquadriques passant par une courbe Γ_4 mais non par la surface $\overline{\Phi}$ sont au nombre de $\infty^{6\nu}$, par conséquent elles découpent sur la surface $\overline{\Phi}$ le système $|\Gamma_4|$ complet et le long d'une courbe Γ_4 il y a une hyperquadrique qui touche la surface.

On passe de la surface Φ à la surface $\overline{\Phi}$ en rapportant projectivement aux hyperplans de $S'_{6\nu}$ les hyperquadriques de $S_{6\nu}$ passant par une courbe $\overline{\Gamma}_4$ et inversement, on passe de Φ à $\overline{\Phi}$ en rapportant projectivement les hyperquadriques de $S'_{6\nu}$ passant par une courbe Γ_4 aux hyperplans de $S_{6\nu}$.

6. Considérons maintenant dans un espace linéaire $S_{12\nu+1}$ à $12\nu + 1$ dimensions, deux espaces $\Sigma_{6\nu}$, $\overline{\Sigma}_{\nu 6}$ à 6ν dimensions n'ayant aucun point commun. Dans $\Sigma_{6\nu}$ nous supposons qu'il existe une surface Φ dont les sections hyperplanes sont les

courbes Γ_4 et dans l'espace $\bar{\Sigma}_{6\nu}$ une surface $\bar{\Phi}$, birationnellement équivalente à Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\bar{\Gamma}_4$. Nous allons considérer les droites déterminées par les points homologues des surfaces Φ et $\bar{\Phi}$.

Les droites qui s'appuient sur une section hyperplane Γ_4 de Φ et en des points homologues sur la courbe $\bar{\Gamma}_4$ correspondante de $\bar{\Phi}$ engendrent une surface $V_2^{32\nu}$ d'ordre 32ν, située dans un hyperplan passant par $\bar{\Sigma}_{6\nu}$.

Les droites qui s'appuient sur une courbe $\bar{\Gamma}_4$ de Φ et en des points homologues sur la section hyperplane correspondante de $\bar{\Phi}$ engendrent une surface $\bar{V}_2^{32\nu}$ d'ordre 32ν située dans un hyperplan passant par $\Gamma_{6\nu}$.

Les droites qui s'appuient en des points homologues sur Φ et $\bar{\Phi}$ engendrent une variété $V_3^{48\nu}$ à trois dimensions d'ordre 48ν.

7. Soit $\varphi = 0$ une hyperquadrique de $\Sigma_{6\nu}$ ne contenant pas Φ ; elle découpe sur cette surface une courbe 8-canonique Γ_8. A cette courbe correspond sur $\bar{\Phi}$ une courbe 8-canonique découpée par une hyperquadrique $\bar{\varphi} = 0$ de $\bar{\Sigma}_{6\nu}$.

L'hyperquadrique de $S_{12\nu+1}$ d'équation

$$\varphi + \bar{\varphi} = 0$$

coupe la variété $V_3^{48\nu}$ suivant une surface qui contient la surface lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur les courbes 8-canoniques qui viennent d'être considérées et qui est complétée par une surface F.

La première surface est d'ordre 64ν et par conséquent la surface F est d'ordre 32ν.

Désignons par H l'homographie biaxiale harmonique de $S_{12\nu+1}$ ayant pour axes les espaces $\Sigma_{6\nu}$, $\bar{\Sigma}_{6\nu}$. La surface F est transformée en soi par cette homographie et celle-ci détermine sur F une involution I du second ordre, un couple de cette involution appartenant à une droite de la variété $V_3^{48\nu}$.

Les points unis de l'involution I doivent appartenir à un des espaces $\Sigma_{6\nu}$, $\bar{\Sigma}_{6\nu}$. L'involution I ayant pour image les surfaces Φ et $\bar{\Phi}$, on voit que dans la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F, à un point de diramation correspondraient deux points unis, ce qui est absurde.

L'involution I est privée de points unis.

On en déduit que la surface F a le genre arithmétique $p_a = 1$.

8. Les surfaces $V_2^{32\nu}$ rencontrent F suivant des courbes C_4 d'ordre 32ν découpées par les hyperplans passant par $\bar{\Sigma}$. Ce courbes correspondent aux courbes Γ_4 dans la correspondance (1, 2) entre Φ et F et d'après la formule de Zeuthen, elles ont donc le genre $20\nu + 1$. Le système $| C_4 |$ a le degré 32ν et d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension $r \geq 12\nu + 1$.

De même, aux courbes $\bar{\Gamma}_4$ correspondent sur F des courbes $\bar{C}_4$ d'ordre 32ν et de genre $20\nu + 1$, situées dans les hyperplans passant par Σ. Le système $| \bar{C}_4 |$ a le degré 32ν et d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension au moins égale à $12\nu + 1$.

L'homographie H transforme en lui-même le système des sections hyperplanes de F et comprend deux systèmes composés au moyen de l'involution I, découpés par les hyperplans passant par Σ et par $\bar{\Sigma}$. Comme les espaces Σ, $\bar{\Sigma}$ ne rencontrent pas F, ces systèmes ne peuvent être formés que par les courbes C_4 et $\bar{C}_4$ homologues des courbes Γ_4 et $\bar{\Gamma}_4$. On en conclut que les systèmes $| C_4 |$ et $| \bar{C}_4 |$ coïncident en un seul système $| C_4 |$ de dimension $12\nu + 1$, formé par les sections hyperplanes de F.

9. Les droites qui s'appuient en des points homologues sur des courbes Γ_3 correspondantes des surfaces Φ, $\bar{\Phi}$ engendrent une surface $V_2^{24\nu}$ d'ordre 24ν qui découpe sur F une courbe C_3 d'ordre 24ν. Les courbes C_3 ont le degré 18ν et le genre $12\nu + 1$. Elles appartiennent à un système $| C_3 |$ de dimension au moins égale à $6\nu + 1$.

Les courbes Γ_4 sont les adjointes aux courbes Γ_3 donc les courbes C_4 découpent la série canonique sur une courbe C_3, puisque l'involution est privée de points unis. Cette série a la dimension 12ν et $| C_4 |$ a la dimension $12\nu + 1$, donc il existe une courbe C_4 contenant une courbe C_3 et la surface F possède une seule courbe canonique $C_4 - C_3$. Elle a donc le genre géométrique $p_g = 1$.

De même, aux courbes $\bar{\Gamma}_3$ correspondent sur F des courbes $\bar{C}_3$ d'ordre 24ν, de genre $12\nu + 1$ et de degré 18ν, appartenant à un système $| \bar{C}_3 |$ de dimension au moins égale à $6\nu + 1$.

L'adjoint à $|\overline{\Gamma}_3|$ étant le système $|\overline{\Gamma}_4|$, le système $|\overline{C}_4|$ est l'adjoint à $|C_3|$. Sur la surface F, les courbes C_3 et $\overline{C}_3$ ont le même ordre et le même adjoint, elles sont dépourvues de points-base, donc elles appartiennent à un même système linéaire $|C_3|$.

10. Aux courbes Γ_2 correspondent sur F des courbes C_2 d'ordre 16ν, de genre $6\nu+1$ et de degré 8ν. Les courbes Γ_3 sont les adjointes aux courbes Γ_2, dont les courbes C_3 sont les adjointes aux courbes C_2. La courbe canonique $C_3 - C_2$ étant unique, le système $|C_3|$ a la dimension $6\nu+1$.

Aux courbes $\overline{\Gamma}_2$ correspondent sur F des courbes $\overline{C}_2$ d'ordre 16ν, de genre $6\nu+1$ et de degré 8ν, ayant pour adjointes les courbes C_3. On en conclut que les courbes C_2, $\overline{C}_2$ appartiennent à un même système linéaire $|C_2|$ dont la dimension est au moins égale à $2\nu+1$.

11. Les droites joignant les points homologues des courbes Γ et $\overline{\Gamma}$ engendrent une surface $V_2^{8\nu}$ d'ordre 8ν appartenant à un espace $\sigma_{6\nu-1}$ à $6\nu-1$ dimensions, déterminé par les espaces $\sigma_{3\nu-1}$ et $\overline{\sigma}_{3\nu-1}$. Elle coupe F suivant une courbe C d'ordre 8ν, de genre $2\nu+1$ et de degré virtuel 2ν.

Les courbes $\overline{\Gamma}_2$ découpent sur Γ la série canonique donc les courbes C_2 sont les adjointes à la courbe C et le système $|C_2|$ a la dimension $2\nu+1$.

Le système $|\Gamma_2|$ contient la courbe Γ comptée deux fois, donc on a

$$|C_2| = |2C|, \quad |C_2 - C| = |C|$$

et la courbe canonique de F est donc la courbe C.

Le système $|C_2|$ est le système bicanonique, $|C_3|$ le système tricanonique et $|C_4|$ système des sections hyperplanes de F, le système tétracanonique.

La surface F *a les genres*

$$p_a = p_g = 1, \; p^{(1)} = 2\pi - 1, \; P_2 = 2\pi, \; P_3 = 6\pi - 4, \; P_4 = 12\pi - 10.$$

Il existe un hyperplan ayant un contact du troisième ordre avec la surface F le long de la courbe C.

Une courbe C_2 appartient à un espace linéaire à $10\nu - 1$ dimensions et les hyperplans passant par cet espace découpent sur F le système bicanonique complet $|C_2|$. Il en résulte que le long d'une courbe C_2, il y a un hyperplan touchant la surface F.

On en déduit qu'il existe un espace linéaire à $10\nu - 1$ dimensions touchant F le long de la courbe C et que les hyperplans passant par cet espace découpent sur la surface le système bicanonique complet $|C_2|$.

12. Nous allons maintenant démontrer que le système tétracanonique $|\Gamma_4|$ de la surface Φ est simple.

Supposons en effet qu'il soit composé au moyen d'une involution d'ordre α. En rapportant projectivement les courbes Γ_4 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{6\nu}$, on obtient une surface Φ' d'ordre $\dfrac{16\nu}{\alpha}\cdot$ Or, la dimension de l'espace contenant une surface normale est au plus égal à son ordre augmenté d'une unité. On doit donc avoir

$$6\nu \leqslant \frac{16\nu}{\alpha} + 1.$$

Comme $\nu \geqslant 2$, on a $\alpha \leqslant 2$, c'est-à-dire $\alpha = 2$. Le système $|\Gamma_4|$ serait donc composé au moyen d'une involution I_2 d'ordre deux et la surface Φ' serait d'ordre 8ν.

La courbe Γ comptée quatre fois est une courbe Γ_4, elle appartient donc à l'involution I_2. Une courbe Γ_2 comptée deux fois est une courbe Γ_4, donc le système $|\Gamma_2|$ appartient à l'involution I_2. Le même raisonnement montre que le système $|\overline{\Gamma}_2|$ ou $|\Gamma'|$ appartient également à I_2. Mais alors la série canonique de Γ appartient à I_2 et cette courbe est hyperelliptique.

La transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution I_2 transforme en lui-même le système tricanonique $|\Gamma_3| = |\Gamma + \Gamma'|$ et par conséquent il existe des courbes Γ_3 appartenant à l'involution I_2. Sur une de ces courbes, la série canonique complète est découpée par les courbes Γ_4 et appartient à I_2. On en conclut que les courbes Γ_3 sont hyperelliptiques.

Sur la surface Φ', la courbe de diramation rencontre Γ en en $2\nu + 4$ points et doit rencontrer une courbe Γ_3 en $3(2\nu + 4) = 12\nu + 4$. Il n'existe aucune valeur entière de ν satisfaisant à cette équation, donc *le système tétracanonique $|\Gamma_4|$ de Φ est simple.*

Liège, le 9 novembre 1966.