Bulletin de la Classe des sciences

Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Formation des équations d'une surface de genres Pa = Pa= 1. P(1) = 5, P2 = 6.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRE ALGÉBRIQUE

Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq

(Première note)

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Formation des équations d'une surface de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 6$.

Nous avons à plusieurs reprises [1] chercher à déterminer une surface régulière possédant une seule courbe canonique de genre cinq ($p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 6$) sans parvenir à construire une surface simple, problème qui se présente dans la détermination des surfaces de genres zéro et de genre linéaire trois ($p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$) [2]. Nous reprenons ce problème et nous obtenons cette fois une surface simple répondant à la question.

A vrai dire, nous obtenons les équations de la surface par une voie détournée. Précisément, nous considérons la surface comme image d'une involution cyclique du quatrième ordre, privée de points unis, appartenant à la surface intersection de quatre hyperquadriques dans un espace linéaire à six dimensions. On sait que le système canonique d'une telle surface coïncide avec le système de ses sections hyperplanes.

---

[1] *Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1959, pp. 441-446 ; 1962, pp. 785-791 ; 1965, pp. 964-969).

[2] *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41).

La surface obtenue appartient à un espace linéaire à cinq dimensions et est l'intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface du quatrième ordre. Ses sections hyperplanes forment son système bicanonique et il existe un hyperplan touchant la surface le long de la courbe canonique.

Chemin faisant, nous avons à considérer la surface image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à la surface intersection de quatre hyperquadriques de S_6. Nous avons déjà plusieurs fois rencontré cette surface. Pour la facilité du lecteur, nous en rappelons brièvement les propriétés en en ajoutant quelques nouvelles.

Il reste à déterminer les singularités de la surface obtenue. La solution de cette question exige quelques calculs et fera l'objet d'une seconde note.

Nous utilisons les propriétés des involutions appartenant à une surface algébrique, nous renvoyons pour ces propriétés à un de nos ouvrages [1].

1. Considérons, dans un espace S_{15} à quinze dimensions deux espaces linéaires Σ_9 et Σ_5 respectivement à neuf et à cinq dimensions. Dans Σ_9, nous supposerons donnée une variété de Veronese Ω_3^8 représentant les quadriques d'un espace à trois dimensions et dans Σ_5, une surface de Veronese Ω_2^4.

La variété lieu des droites s'appuyant sur les variétés Ω_3^8, Σ_2^4 est l'intersection des cônes projetant Ω_3^8 de Σ_5 et Ω_2^4 de Σ_9 ; c'est donc une variété V_6^{32} d'ordre 32, à six dimensions.

Les équations des cônes projetant Ω_3^8 de Σ_5 et Ω_2^4 de Σ_9 sont obtenues en écrivant que les déterminants symétriques respectivement

$$|\,Y_{ik}\,|, \qquad (i,\, k = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$$

$$|\,Z_{ik}\,| \qquad (i,\, k = 0,\, 1,\, 2)$$

sont de caractéristique un, les Y et les Z étant les coordonnées de S_{15}.

Posons

$$Y_{ik} = y_i y_k \quad Z_{ik} = z_i z_k$$

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

et considérons l'espace S_6 à six dimensions dont les coordonnées ponctuelles sont les y et les z.

Désignons par σ_3 l'espace d'équations $z_0 = z_1 = z_2 = 0$ et par σ_2 l'espace ayant pour équations $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Soit H l'homographie biaxiale harmonique ayant pour axes ponctuels σ_3 et σ_2. Ses équations s'écrivent

$$\rho y'_i = y_i, \quad \rho z'_k = -z_k, \quad (i = 0, 1, 2, 3\,;\, k = 0, 1, 2).$$

A un hyperplan de S_{15} correspond dans S_6 une hyperquadrique

$$f_2(y_0, y_1, y_2, y_3) + \varphi_2(z_0, z_1, z_2) = 0,$$

f_2 et φ_2 étant des formes quadratiques de leurs arguments. Une telle hyperquadrique est transformée en elle-même par l'homographie H de sorte que la variété V_6^{32} est l'image de l'involution I engendrée par H dans S_6.

Une hyperquadrique de S_6, d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iz_k = 0$$

et passant par les axes σ_3, σ_2 de H, est transformée en elle-même par H. Il lui correspond dans S_{15} l'hyperquadrique d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}Z_{kh} = 0 \tag{1}$$

passant par les espaces Σ_9 et Σ_5.

Sur la variété V_6^{32}, les éléments de diramation Ω_3^8, Ω_2^4 pour la correspondance (1, 2) avec S_6 sont équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des variétés rationnelles à cinq dimensions Δ_1. Δ_2. Soient A une section hyperplane de la variété V_6^{32} et A' la section de cette variété par l'hyperquadrique (1). D'après la théorie des involutions, on a

$$2A \equiv 2A' + \Delta_1 + \Delta_2.$$

L'hyperquadrique (1) touche la variété V_6^{32} suivant une variété à cinq dimensions d'ordre 32.

Observons que l'ensemble d'un hyperplan passant par σ_3 et d'un hyperplan passant par σ_2,

$$(\Sigma\lambda_iy_i)(\Sigma\mu_kz_k) = 0$$

est une hyperquadrique (1) particulière. Il en résulte que les hyperplans

$$\Sigma\lambda_i\lambda_j Y_{ij} = 0, \quad \Sigma\mu_k\mu_h Z_{kh} = 0$$

touchent la variété V_6^{32} le long de variétés à cinq dimensions d'ordre 16.

2. Considérons une surface F section de la variété V_6^{32} par un espace S_{11} à onze dimensions. On peut choisir cet espace de telle sorte qu'il ne rencontre aucune des variétés Ω_3^8, Ω_2^4, ce que nous supposerons fait. L'espace S_{11} est l'intersection de quatre hyperplans dont nous écrirons les équations sous la forme

$$\Sigma\varphi_h(Y_{ik}) + \Sigma\psi_h(Z_{ik}) = 0, \qquad (h = 1, 2, 3, 4).$$

les φ_h et les ψ_h étant des formes linéaires.

A la surface F correspond dans S_6 une surface F′ intersection de quatre hyperquadriques

$$\Sigma\varphi_h(y_i y_k) + \Sigma\psi_k(z_i z_k) = 0$$

et cette surface a l'ordre 16, ne rencontre pas les axes σ_3, σ_2 de H. Celle-ci détermine sur F′ une involution I privée de points unis. La surface F est privée de points de diramation comme cela résulte du reste du choix de S_{11}.

On sait que le système canonique $|K|$ de la surface F′ coïncide avec celui de ses sections hyperplanes. La surface a donc les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$. D'après la théorie des involutions, la surface F a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$.

Le système canonique $|K|$ de F′ contient deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, $|K_0|$, de dimension deux, est découpé par les hyperplans passant par σ_3, l'autre, $|K_1|$, de dimension trois, est découpé par les hyperplans passant par σ_2. Soient $|C_0|$, $|C_1|$ les systèmes correspondants sur F.

Nous avons démontré que celui des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$ qui est le système canonique de F est celui qui a la plus petite dimension. C'est donc $|C_0|$.

Aux hyperplans de S_6 passant par σ_3 correspondent dans S_{15} des hyperplans passant par Σ_9 et touchant la variété V_6^{32} et par suite la surface F le long d'une courbe C_0. Observons qu'un hyperplan de S_6 passant par σ_3 coupe σ_2 suivant une droite à laquelle correspond sur Ω_2^4 une conique. Les courbes C_0 sont donc les intersections de S_{11} avec les cônes projetant de Σ_9 les coniques de Ω_2^4. Il en résulte que les courbes C_0 appartiennent à des espaces à huit dimensions.

Les courbes C_1 se trouvent de même sur les cônes projetant de Σ_5 les surfaces de Veronese tracées sur la variété Ω_3^8. Elles appartiennent à des espaces à sept dimensions. Le long d'une courbe C_1, il y a un hyperplan touchant la surface F.

L'involution I sur F' étant dépourvue de points unis, on a

$$2C_0 = 2C_1$$

et le diviseur de Severi de la surface F est $\sigma = 2$.

Le système $|C_1|$ est comme $|C_0|$, de genre 9 et de degré 8. Une courbe C_1 rencontre une courbe C_0 en huit points.

3. Le système bicanonique de F' est découpé par les hyperquadriques de S_6. Il contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Le premier, de dimension 11, est découpé par les hyperquadriques ne passant pas par les axes σ_3, σ_2 de l'homographie H. Le second, de dimension 11 également, est découpé par les hyperquadriques contenant les axes de H.

Le premier système contient les courbes $2K_0$ découpées par les cônes quadratiques de sommet σ_3 et les courbes $2K_1$ découpées par les cônes quadratiques de sommet σ_2. On en conclut que c'est au premier système que correspond sur F le système bicanonique de cette surface. Il contient les courbes $2C_0$, $2C_1$. Il coïncide avec le système des sections hyperplanes de F et cette surface a le bigenre $P_2 = 12$.

Au second système correspond sur F le système $|C_0 + C_1|$ et le long d'une de ses courbes, il y a une hyperquadrique touchant F en chaque point d'intersection.

Le système bicanonique $|2C_0|$ a le genre 25, le degré 32 et la dimension $P_2 - 1 = 11$. Le système $|C_0 + C_2|$ a les mêmes caractères.

Les courbes bicanoniques découpent sur une courbe C_0 la série canonique et sur une courbe C_1 une série paracanonique. Ces courbes, qui appartiennent à des espaces à 8 et 7 dimensions respectivement, sont donc normales.

4. Nous allons maintenant supposer que la surface F′ est transformée en elle-même par l'homographie

$$\mathrm{H}_0 = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & -y_2 & -y_3 & iz_0 & -iz_1 & -iz_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix},$$

cyclique de période quatre. On a $\mathrm{H}_0^2 = \mathrm{H}$.

Nous prendrons pour équations de F′

$$\begin{aligned}
&a_{00}y_0^2 + a_{01}y_0y_1 + a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2 + z_0(c_1z_1 + c_2z_2) = 0,\\
&a'_{00}y_0^2 + a'_{01}y_0y_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + z_0(c'_1z_1 + c'_2z_2) = 0,\\
&b_{02}y_0y_2 + b_{03}y_0y_3 + b_{12}y_1y_2 + b_{13}y_1y_3 + c_{00}z_0^2 + c_{11}z_1^2 + c_{12}z_1z_2 + c_{22}z_2^2 = 0,\\
&b'_{02}y_0y_2 + b'_{03}y_0y_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + c'_{12}z_1z_2 + c'_{22}z_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

On observera que la surface F′ ne rencontre pas les axes σ_3, σ_2 de l'homographie H. De plus, si nous représentons par O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf y_i et par O'_k le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf z_k, les axes ponctuels de H_0 sont les droites $\mathrm{O}_0\mathrm{O}_1$, $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$, $\mathrm{O}'_1\mathrm{O}'_2$ et le point O'_0. La surface F′ n'a aucun point commun avec ces éléments et l'involution I_4 engendrée sur F′ par H_0 est dépourvue de points unis. Nous désignerons par Φ une surface image de cette involution.

A une courbe canonique Γ_0 de Φ correspond sur F une courbe canonique C_0 de cette surface et sur F′, une courbe canonique K_0. Les courbes K_0 sont découpées sur F′ par les hyperplans passant par σ_3 et parmi ces courbes celles qui appartiennent à I_4 sont la courbe découpée par $z_0 = 0$ et les courbes découpées par les hyperplans $\lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 = 0$. Dans le système canonique $|\mathrm{C}_0|$ de F, il existe donc une courbe C_{00} et un faisceau de courbes $|\mathrm{C}_{01}|$ appartenant à l'involution I′ homologue de I_4. On en conclut que la surface Φ possède une seule courbe canonique Γ_0 homologue de C_{00}. Cette courbe Γ_0 est de genre cinq et la surface Φ a les caractères $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$.

5. Désignons dans l'espace S_{15} par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf Y_{ik} et par O'_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf Z_{ik}. A l'homographie H_0 correspond dans S_{15} une homographie biaxiale harmonique H′ dont les

axes ponctuels sont

$$O_{00}O_{01}O_{11}O_{22}O_{23}O_{33}O'_{01}O'_{02} \qquad (\Sigma_y)$$

et

$$O_{02}O_{03}O_{12}O_{13}O'_{00}O'_{11}O'_{12}O'_{22} \qquad (\Sigma'_y)$$

Ce sont des espaces à sept dimensions.

Observons qu'à l'hyperplan $z_0 = 0$ de S_6 correspond dans S_{15} le cône projetant de Σ_9 la conique homologue de la droite $z_0 = 0$ du plan σ_2 sur la surface Ω_2^4, c'est-à-dire le cône

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0.$$

La courbe C_{00} est donc l'intersection de ce cône avec l'espace S_{11} de F. Cet espace a actuellement pour équations

$$\begin{aligned} a_{00}Y_{00} + a_{01}Y_{01} + a_{11}Y_{11} + a_{22}Y_{22} + a_{23}Y_{23} + a_{33}Y_{33} \\ + c_1Z_{01} + c_2Z_{02} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a'_{00}Y_{00} + a'_{01}Y_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c'_1Z_{01} + c'_2Z_{02} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} b_{02}Y_{02} + b_{03}Y_{03} + b_{12}Y_{12} + b_{13}Y_{13} + c_{00}Z_{00} + c_{11}Z_{11} \\ + c_{12}Z_{12} + c_{22}Z_{22} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b'_{02}Y_{02} + b'_{03}Y_{03} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c'_{12}Z_{12} + c'_{22}Z_{22} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

La surface F ne rencontre pas les axes Σ_y, Σ'_y de H'.

Au système bicanonique $|2\Gamma_0|$ de Φ correspond sur F l'un des systèmes découpés par les hyperplans passant par Σ_y ou Σ'_y et précisément celui de ces systèmes contenant la courbe $2C_{00}$, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned} \lambda_{02}Y_{02} + \lambda_{03}Y_{03} + \lambda_{12}Y_{12} + \lambda_{13}Y_{13} + \mu_{00}Z_{00} + \mu_{11}Z_{11} \\ + \mu_{12}Z_{12} + \mu_{22}Z_{22} = 0, \end{aligned}$$

l'hyperplan $Z_{00} = 0$ touche en effet F le long de la courbe C_{00}.

Nous obtiendrons un modèle bicanonique de Φ en éliminant les Y et les Z figurant dans les équations (1) et (2) entre ces équations et celles des variétés Ω_3^8 et Ω_2^4.

6. De l'équation (1) on déduit

$$\frac{1}{Y_{22}}(a_{00}Y_{02}^2 + a_{01}Y_{02}Y_{12} + a_{11}Y_{12}^2)$$
$$+ \frac{1}{Y_{00}}(a_{22}Y_{02}^2 + a_{23}Y_{02}Y_{03} + a_{33}Y_{03}^2) + c_1Z_{01} + c_2Z_{02} = 0,$$

ce que nous écrirons sous la forme

$$\frac{1}{Y_{22}}\varphi_1 + \frac{1}{Y_{00}}\varphi_2 + \psi = 0.$$

En partant de l'équation (2), on obtiendra une équation analogue

$$\frac{1}{Y_{22}}\varphi_1' + \frac{1}{Y_{00}}\varphi_2' + \psi' = 0.$$

Comme on a $Y_{00}Y_{22} = Y_{02}^2$, on en déduit

$$Y_{02}^2[\psi^2\varphi_1'\varphi_2' + \psi'^2\varphi_1\varphi_2 - \psi\psi'(\varphi_1\varphi_2' + \varphi_1'\varphi_2)] + (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)^2 = 0. \qquad (5)$$

Observons que l'on a

$$\begin{aligned}\varphi_1\varphi_2 = Y_{02}^2[&a_{00}a_{22}Y_{02}^2 + a_{00}a_{23}Y_{02}Y_{03} + a_{00}a_{33}Y_{03}^2\\ &+ a_{01}a_{22}Y_{02}Y_{12} + a_{01}a_{23}Y_{02}Y_{13} + a_{01}a_{33}Y_{03}Y_{13}\\ &+ a_{11}a_{22}Y_{12}^2 + a_{11}a_{23}Y_{12}Y_{13} + a_{11}a_{33}Y_{13}^2].\end{aligned}$$

Nous poserons

$$\varphi_1\varphi_2 = Y_{02}^2\xi_1$$

et de même

$$\varphi_1'\varphi_2' = Y_{02}^2\xi_2, \quad \varphi_1'\varphi_2 = Y_{02}^2\xi_3, \quad \varphi_1\varphi_2' = Y_{02}^2\xi_4,$$

les ξ étant des formes quadratiques.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\psi^2 &= Z_{00}(c_1^2Z_{11} + 2c_1c_2Z_{12} + c_2^2Z_{22}),\\ \psi\psi' &= Z_{00}[c_1c_1'Z_{11} + (c_1c_2' + c_1'c_2)Z_{12} + c_2c_2'Z_{22}],\\ \psi'^2 &= Z_{00}[c_1'^2Z_{11} + 2c_1'c_2'Z_{12} + c_2'^2Z_{22}).\end{aligned}$$

Nous poserons

$$\psi^2 = Z_{00}\eta_{11}, \quad \psi\psi' = Z_{00}\eta_{12}, \quad \psi'^2 = Z_{00}\eta_{22},$$

les η étant des formes linéaires en Z_{22}, Z_{23}, Z_{33}.

L'équation (5), débarrassée du facteur Y_{02}^4, devient

$$Z_{00}[\eta_{11}\xi_2 + \eta_{11}\xi_1 - \eta_{12}(\xi_3 + \xi_4)] + (\xi_3 - \xi_4)^2 = 0. \qquad (6)$$

Cette équation représente, dans l'espace Σ_7', une variété V_6^4 image de l'involution d'ordre quatre engendrée par H_0 dans l'espace S_6.

7. Dans l'espace Σ_7', l'équation (6) jointe aux équations

$$Y_{02}Y_{13} - Y_{03}Y_{12} = 0, \quad Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0$$

représente une variété V_4^{16} à quatre dimensions, d'ordre 16, dont la section par les hyperplans (3) et (4), c'est-à-dire par un espace S_5 à cinq dimensions, est la surface Φ.

Représentons pour abréger par $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ les équations (3) et (4).

La courbe canonique Γ_0 de la surface Φ a pour équations

$$F_1 = 0, F_2 = 0, Z_{00} = 0, \xi_3 - \xi_4 = 0, Y_{02}Y_{13} - Y_{03}Y_{12} = 0,$$
$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0.$$

C'est donc une courbe canonique de genre cinq et d'ordre huit, normale dans un espace à quatre dimensions.

Le système bicanonique $|2\Gamma_0|$ de la surface Φ coïncide avec celui de ses sections hyperplanes et le bigenre de la surface est $P_2 = 6$.

La surface Φ étant dans l'espace S_5 l'intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface du quatrième ordre, son système canonique est découpé par les hyperquadriques adjointes. Actuellement, il y a une seule courbe canonique, donc une seule hyperquadrique adjointe qui est nécessairement

$$\xi_3 - \xi_4 = 0.$$

La détermination des singularités de la surface Φ exige des calculs assez longs, les quatre hyperquadriques $\xi = 0$ étant dégénérées en deux hyperplans. Ce sera l'objet d'une seconde note.

On peut observer que la surface Φ ne passant pas par les points O_{11}', O_{22}', on peut, dans l'équation (6), remplacer Z_{11}, Z_{22} par des expressions linéaires en Y_{02}, Y_{03}, Y_{12}, Y_{13}, Z_{00}, Z_{12} tirées des équations (3) et (4). On obtient ainsi l'équation de la surface dans l'espace à cinq dimensions $O_{02}O_{03}O_{12}O_{13}O_{00}'O_{12}'$.

Liège, le 22 juin 1966.