Bulletin de la Classe des sciences

Une configuration formée par trois suites de Laplace

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Construction de trois suites de Laplace dont deux sont doublement inscrites dans deux autres.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Une configuration formée par trois suites de Laplace

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de trois suites de Laplace dont deux sont doublement inscrites dans deux autres.

Soit (x) une surface dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques et soit (y) le lieu du second point. Nous avons établi que la suite de Laplace déterminée par les foyers p, q de la première directrice de Wilczynski xy était doublement inscrite dans la suite de Laplace déterminée par les foyers m, n de la seconde directrice de Wilczynski [1]. En d'autres termes, toute droite contenant deux termes consécutifs de la première suite de Laplace contient deux points de la seconde. Précisons en disant que entre ces deux points, il y a deux autres points de la suite. Notons encore que dans ce cas, la seconde directrice de Wilczynski engendre une congruence de Goursat.

Dans cette courte note nous considérons une suite de Laplace dont quatre points consécutifs sont U^1, U, V, V^1 et nous supposons que la droite U^1V^1 contient deux points P, Q transformés de

[1] *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1928, pp. 158-186, 345-348). Voir aussi notre mémoire *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8 de l'Académie, 1964, pp. 1-83), ainsi que notre note *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Bulletin de l'Académie, 1928, pp. 455-466).

Laplace l'un de l'autre, les variables étant les mêmes que pour la suite de Laplace donnée. Nous montrons que la première suite est doublement inscrite dans celle qui contient les points P, Q. De plus, il existe une troisième suite doublement inscrite dans la première. Nous montrons d'ailleurs que ces trois suites appartiennent nécessairement à un espace projectif à trois dimensions. Enfin, nous indiquons la condition imposée à la première suite pour que les deux autres existent.

1. Soient, dans un espace projectif S_r à r dimensions ($r > 2$), U et V deux points dépendant de deux paramètres u, v, transformés de Laplace l'un de l'autre. Nous supposerons que le point V est le transformé de Laplace de U dans le sens des u et donc U celui de V dans le sens des v.

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1 ; U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Nous désignerons cette suite par la notation (U — V).

Supposons que les points U^1, V^1 soient conjugués par rapport à la congruence (U^1, V^1). Désignons par P, Q les foyers de la droite U^1V^1, Q étant le transformé de Laplace de P dans le sens des u et par suite P celui de Q dans le sens des v.

Les points P, Q appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, P^n, \ldots, P^1, P, Q, Q^1, \ldots, Q^n, \ldots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Nous désignerons cette suite par la notation (P — Q).

Le réseau (U^1) étant conjugué à la congruence (PQ), la suite (U — V) est inscrite dans la suite (P — Q). Le point U appartient à la droite QQ^1, le point V à la droite Q^1Q^2, le point V^1 à la droite Q^2Q^3. Plus généralement, le point V^n appartient à la droite $Q^{n+1}Q^{n+2}$. De même, le point U^n appartient à la droite $P^{n-1}P^{n-2}$.

Le réseau (V^1) étant conjugué à la congruence (PQ), la suite (U — V) est une seconde fois inscrite dans la suite (P — Q). Le point U^n appartient à la droite $P^{n+1}P^{n+2}$ et le point V^n à la droite $Q^{n-1}Q^{n-2}$.

Ainsi donc le point U^n est l'intersection des droites $P^{n-1}P^{n-2}$ et $P^{n+1}P^{n+2}$, le point V^n est l'intersection des droites $Q^{n-1}Q^{n-2}$ et $Q^{n+1}Q^{n+2}$. (Si $n = 1$, on pose $Q^{-1} = P$, $P^{-1} = Q$).

La suite (U — V) *est doublement inscrite dans la suite* (P — Q).

2. Le plan tangent en P à la surface (P) contient les points U^1, V^1, U^2, V et le plan tangent en Q à la surface (Q) les points U^1, V^1, U, V^2. Ces deux plans ont en commun la droite U^1V^1 et par conséquent ils appartiennent à un espace à trois dimensions S_3.

Il en résulte que les points V^1 et V^2 sont des expressions linéaires des points V, U, U^1, U^2. Si l'on dérive la première de ces équations par rapport à u, on obtient la seconde et si l'on dérive celle-ci par rapport à u, on trouve que le point V^3 s'exprime linéairement par rapport aux points V, U, U^1, U^2. Le point V^3 appartient donc à l'espace S_3.

On démontre de même que le point U^3 appartient également à l'espace S_3.

Les suites de Laplace (U — V) *et* (P — Q) *appartiennent donc à un espace à trois dimensions*. On a $r = 3$.

3. Les droites U^1U^2 et VV^1 se rencontrent en un point X et les droites V^1V^2 et UU^1 en un point Y.

La tangente à la ligne u au point X de la surface (X) est l'intersection des plans tangents aux développables engendrées par les droites U^1U^2 et VV^1 lorsque u varie. Ces plans tangents sont U^2U^1U et VV^1V^2. Ces deux plans se rencontrent suivant la droite XY.

De même la tangente à la ligne v au point Y de la surface (Y) est la droite XY.

Il en résulte que le point Y est le transformé de Laplace de X dans le sens des u et X celui de Y dans le sens des v.

Les points X, Y appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, X^n, \ldots, X^1, X, Y, Y^1, \ldots, Y^n, \ldots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Nous la dénoterons par (X — Y).

Le réseau (X) est conjugué aux congruences (U^1U^2) et (VV^1), par suite *la suite* (X — Y) *est doublement inscrite dans la suite* (U — V).

D'une manière précise, le point X^n appartient aux droites $U^{n+1}U^{n+2}$ et $U^{n-1}U^{n-2}$, le point Y^n appartient aux droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $V^{n-1}V^{n-2}$.

En particulier, les points X^1, Y^1 appartiennent à la droite UV et les réseaux (X^1), (Y^1) sont conjugués à la congruence (UV). Nous nous trouvons donc devant le même problème qu'au début à condition de remplacer la suite (X — Y) par la suite (U — V) et la suite (U — V) par la suite (P — Q). On retrouve ainsi que la suite (X — Y) est doublement inscrite dans la suite (U — V).

4. La suite (U — V) étant donnée, l'existence de la suite (P — Q) implique quelque condition pour la première suite.

Les tangentes aux courbes u aux différents points de la droite U^1V^1 s'appuient sur la droite UV^2. Si donc il existe sur U^1V^1 un point P tel que la tangente en ce point à la courbe u soit confondue avec U^1V^1, il faut et il suffit que les droites U^1V^1 et UV^2 se rencontrent en un point Q.

Cela étant, la tangente à la courbe v au point Q s'appuie sur les droites VU^2 et U^1V^1 ; elle se confond donc avec la dernière de ces droites et la droite VU^2 passe par P. Les points P et Q sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la suite (P — Q) *est que les points* U, U^1, V^1, V^2 *soient coplanaires.*

Si l'on exprime analytiquement cette condition, en dérivant par rapport à v la relation linéaire entre les points considérés, on retrouve la condition pour que les points V, V^1, U^1, U^2 soient coplanaires.

Liège, le 24 janvier 1966.