Bulletin de la Classe des sciences

Congruences de courbes sur une variété algébrique à trois dimensions

Lucien Godeaux

Résumé
Relation fonctionnelle entre les groupes de points : foyers, intersection avec une surface canonique et groupe canonique d'une courbe appartenant à une congruence dans une variété algébrique à trois dimensions.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Congruences de courbes sur une variété algébrique à trois dimensions

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Relation fonctionnelle entre les groupes de points : foyers, intersection avec une surface canonique et groupe canonique d'une courbe appartenant à une congruence dans une variété algébrique à trois dimensions.

Dans le deuxième volume de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (1), Darboux a fait la théorie des points focaux des congruences de courbes. Dans une note déjà ancienne, nous avons utilisé cette théorie pour déterminer le nombre des foyers appartenant à une courbe d'une congruence algébrique (2). Plus tard, M. Derwidué a donné une interprétation fonctionnelle de notre travail (3). Le but de cette note est l'étude des congruences algébriques de courbes algébriques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

Après avoir étendu le théorème de Darboux aux congruences considérées, nous montrons que sur une courbe C d'une con-

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1889.

(2) *Sur la théorie des congruence de courbes* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1921, pp. 51-61).

(3) *Sur les transformations birationnelles de l'espace laissant invariantes les courbes d'une congruence linéaire* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1943, pp. 187-193).

gruence algébrique G, le groupe D des points focaux joint au groupe H des points découpés sur C par une surface canonique de la variété, est équivalent à un groupe canonique K de C. On a

$$P + H \equiv K.$$

L'application de cette formule à la congruence formée par les intersections des surfaces d'un réseau nous permet de retrouver une formule due à Pannelli.

L'application à une congruence telle que par un point ne passe qu'une courbe et que la congruence considérée comme une variété à deux dimensions n'est pas rationnelle ni référable à une surface réglée, donne un résultat intéressant. Il n'existe pas de points focaux et les surfaces canoniques de la variété découpent sur une courbe de la congruence des groupes canoniques de la courbe.

1. Soient, dans un espace S_4 à quatre dimensions, une variété algébrique V d'équation

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = 0$$

et sur cette variété une congruence G de courbes algébriques C.

Nous dirons qu'une surface appartient à la congruence lorsqu'elle est engendrée par une infinité de courbes de la congruence.

Un point d'une courbe C est un foyer de cette courbe si toutes les surfaces de la congruence contenant cette courbe ont même plan tangent en ce point.

Considérons sur V deux systèmes linéaires de surfaces $|M|$, $|N|$ et supposons que contenir une courbe C impose μ conditions à une surface M et ν conditions à une surface N. Cela étant, supposons que les systèmes $|M|$ et $|N|$ éventuellement incomplets, aient respectivement les dimensions μ et ν.

Par une courbe C passent une surface M et une surface N. Soient

$$M(x_0,x_1,\dots,x_4\,;\,u,v) = 0, \qquad N(x_0,x_1,\dots,x_4\,;\,u,v) = 0$$

les équations de ces surfaces, u et v étant les paramètres fixant la position de C dans la congruence.

Les surfaces précédentes ont en commun une courbe C et, éventuellement, une courbe C', irréductible ou non. Lorsque u, v varient, la courbe C + C' engendre une congruence G'.

Les courbes de la congruence G' pour lesquelles on a $u = \varphi(v)$ engendrent une surface de la congruence et le plan tangent en un point x d'une courbe C + C' de cette surface a pour équations

$$\left(X_0 \frac{\partial M}{\partial x_0} + X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \dots + X_4 \frac{\partial M}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial u} u' + \frac{\partial N}{\partial v}\right)$$

$$- \left(X_0 \frac{\partial N}{\partial x_0} + X_1 \frac{\partial N}{\partial x_1} + \dots + X_4 \frac{\partial N}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial u} u' + \frac{\partial M}{\partial v}\right) = 0,$$

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + X_4 \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0.$$

Pour que le point x soit un foyer de C + C', il faut que ces équations soient indépendantes de u', c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial M}{\partial u} u' + \frac{\partial M}{\partial v} = k \left(\frac{\partial N}{\partial u} u' + \frac{\partial N}{\partial v}\right),$$

k étant une constante, ou encore

$$\frac{\partial (M,N)}{\partial (u,v)} = 0. \tag{1}$$

Les points de rencontre de cette surface avec la courbe C + C' donnent les foyers de cette courbe, mais ce qui nous intéresse ce sont les foyers de C. Observons qu'un point commun aux courbes C, C' est un foyer de la courbe C + C', car le plan tangent aux surfaces contenant cette courbe contient les tangentes aux courbes C et C'.

Si nous désignons par D le groupe des foyers de la courbe C, par P le groupe des points communs aux courbes C, C', par L une section hyperplane de C, enfin par m, n les ordres des surfaces M, N, on a

$$D + P = (m + n)L. \tag{2}$$

La série canonique de la courbe C est découpée par les hypersurfaces d'ordre $m + n + p - 5$, p étant l'ordre de V, passant par la courbe C'. On a donc en désignant par K les groupes canoniques de la courbe C,

$$K + P = (m + n + p - 5)L. \tag{3}$$

La comparaison des relations (2) et (3) donne

$$D + (p - 5)L = K. \tag{4}$$

Si d est le nombre des foyers de la courbe C, a son ordre et π son genre, on a

$$d + (p - 5)a = 2\pi - 2. \tag{5}$$

2. Supposons que V soit une hypersurface cubique. On a $p = 3$ et la relation (4) donne

$$D = K + 2L.$$

La variété V contient ∞^2 droites formant une congruence. Dans la relation (5), on a $a = 1$, $p = 3$, $\pi = 0$ d'où $d = 0$.

Si V est une hypersurface du quatrième ordre la relation (4) devient

$$D = K + L.$$

Supposons $p \geqslant 5$ et observons que le système canonique de V est découpé par les hypersurfaces adjointes d'ordre $p - 5$. Si nous désignons par H le groupe des points de rencontre de C avec une surface canonique de V, la formule (4) donne

$$D + H = K. \tag{6}$$

3. En calquant les démonstrations de Darboux, on démontre que :

Un point commun à toutes les courbes de la congruence compte en général pour deux foyers.

Si les courbes d'une congruence s'appuient sur une courbe fixe, les points d'appui sont des foyers.

Le lieu des foyers d'une congruence est en général une surface : la surface focale. Les courbes de la congruence sont tangentes à la surface focale en chacun de leurs foyers.

Si une congruence est d'ordre un, c'est-à-dire si par un point de V passe une seule courbe de la congruence, la surface focale se réduit à un ensemble de courbes sur lesquelles s'appuient les courbes de la congruence.

4. Considérons sur V un système linéaire $|F|$ de dimension au moins égale à deux. Les courbes C intersections des couples de surfaces F d'un réseau forment une congruence linéaire. Les foyers sont les points communs aux surfaces du réseau.

Si n est le degré du système $|F|$, π le genre de C et h le nombre de points de rencontre de C avec une surface canonique, on a

$$2n + h = 2\pi - 2.$$

En particulier, si $|F|$ est le système canonique de V, Ω_0 son degré et Ω_1 le genre des courbes intersections, on a

$$3\ \Omega_0 = 2\ \Omega_1 - 2,$$

formule due à Pannelli (1).

5. Considérons sur la variété V une congruence G d'ordre un de courbes C qui, considérée comme système doublement infini, ne soit ni rationnelle ni de la classe des réglées. D'une manière précise, nous supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les courbes C et les points d'une surface Φ non rationnelle et n'appartenant pas à la famille des réglées. Nous supposons d'autre part que les courbes C ne sont pas rationnelles ($\pi > 0$). Notons encore que les courbes C ne peuvent passer par un point fixe.

La congruence G étant d'ordre un, les foyers d'une courbe C sont des points d'appui sur une courbe. Soit Γ une de ces courbes. Dans le cas général, les tangentes aux courbes C en un P des points d'appui de ces courbes sur Γ forment un faisceau. Les courbes C passant par P forment donc un faisceau rationnel et à ces courbes correspondent sur Φ une courbe rationnelle γ. A chaque point de Γ correspond sur Φ une courbe rationnelle γ et Φ contenant une infinité de courbes rationnelles appartient

(1) *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1e sem. 1906, pp. 483-489).

à la classe des réglées, contrairement à l'hypothèse. La congruence G ne peut donc posséder de points focaux et la relation (6) devient

$$H = K.$$

Si la variété V contient une congruence d'ordre un de courbes qui ne soit pas rationnelle et n'appartienne pas à la classe des réglées, les surfaces canoniques de V déterminent sur une courbe de la congruence des groupes canoniques de cette courbe.

6. Nous allons donner un exemple d'application de ce théorème.

Soient F_0 une surface algébrique de genre géométrique $p_g > 0$ et C_0 une courbe algébrique de genre $\pi > 0$. La variété à trois dimensions V représentant les couples de points de F_0 et de C_0 contient un faisceau irrationnel $\{F\}$ de genre π de surfaces birationnellement identiques à F_0 et une congruence d'ordre un de courbes C de genre π.

Le système canonique de V a été déterminé par Severi (1).

Soient F_1, F_2, ..., $F_{2\pi-2}$ des surfaces du faisceau $\{F\}$ qui correspondent aux points d'un groupe canonique de la courbe C_0.

D'autre part, les courbes C qui correspondent aux points d'une courbe canonique de la surface F_0 forment une surface Φ appartenant à la congruence G. Soient Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{p_g} p_g surfaces correspondant aux p_g courbes canoniques linéairement indépendantes de F_0.

Les surfaces

$$\Sigma \lambda_{ik} F_i \Phi_k = 0$$

forment le système canonique de V, mais elles ne sont pas toutes linéairement indépendantes, car les surfaces F_i dépendent de π d'entre elles. Le genre géométrique de la variété V est $p_g \pi$.

Il existe évidemment des courbes C qui n'appartiennent pas à toutes les surfaces Φ. Une de ces courbes ne rencontre pas les surfaces Φ mais rencontre les surfaces F en un point, donc les surfaces F qui sont associées aux surfaces Φ ne contenant pas la courbe C coupe celle-ci suivant un groupe canonique de C.

Liège, le 9 octobre 1967.

(1) *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2e sem. 1909, pp. 33-87).