

X.

Sur les surfaces possédant un faisceau  
irrationnel de courbes hyperelliptiques  
de genre trois,

par **Lucien Godeaux.**

(Présenté dans la session du 11. Avril 1913.)

Au cours d'une correspondance avec M. Rosenblatt, j'ai été amené à chercher les valeurs des genres d'une surface algébrique possédant un faisceau irrationnel de courbes de genre deux. Les résultats obtenus ont été utilisés par M. Rosenblatt dans un travail récent<sup>1)</sup>. Si  $F$  est une surface algébrique possédant un faisceau de genre  $p$  de courbes hyperelliptiques de genre deux  $C$ , les groupes canoniques de ces courbes déterminent, sur  $F$ , une involution  $I_2$  de couples de points. Une surface  $F^*$ , dont les points représentent les couples de cette  $I_2$ , possède un faisceau de courbes rationnelles (correspondantes aux  $C$ ) et est par conséquent référible à une réglée (de genre  $p$ ). J'obtenais aisément une expression fonctionnelle de la courbe de diramation sur  $F^*$  et, à l'aide des formules de Zeuthen et de Severi, j'en déduisais les valeurs de  $p_a$  et de  $p^{(1)}$  de  $F$ .

Le procédé que je viens de rappeler sommairement peut aussi s'appliquer aux surfaces algébriques possédant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre quelconque, et dans ce travail, je vais précisément l'appliquer au cas de

<sup>1)</sup> Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre deux. C. R. 1913, Vol. CLVI. — M. Rosenblatt publie une note plus étendue dans »Práce mat.-fyz.«

courbes hyperelliptiques de genre trois. J'obtiens le théorème suivant.

Si une surface algébrique de genre linéaire supérieur à l'unité, possède un faisceau de genre  $p > 0$  de courbes hyperelliptiques de genre trois, cette surface a le genre arithmétique

$$p_a = p_g - p - \varepsilon,$$

le genre linéaire

$$p^{(1)} = 2p_g + 2p + 2\pi - 3 - 2\varepsilon$$

et le genre géométrique

$$p_g \leq 3\pi - 6p + 9,$$

$\pi$  étant un nombre entier tel que

$$p < \frac{\pi + 1}{2},$$

et  $\varepsilon$  pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, ou 3 ou bien la surface possède un faisceau de genre trois de courbes de genre  $p$  unisécantes des courbes du faisceau donné, et alors elle a les genres

$$p_a = 2p - 3, \quad p^{(1)} = 16p - 15, \quad p_g = 3p.$$

1. Soit  $F$  une surface algébrique de genre linéaire  $p^{(1)} > 1$ , possédant un faisceau  $\{C\}$  de genre  $p > 0$  de courbes hyperelliptiques de genre trois  $C$ . Soit  $|L|$  le système canonique de cette surface.

Supposons  $|L|$  irréductible. Cela revient, puisque  $p^{(1)} > 1$ , à supposer que la surface  $F$  ne possède pas un faisceau  $\{K\}$  de genre trois de courbes  $K$  de genre  $p$  unisécantes des  $C$ . Les surfaces possédant cette dernière propriété sont bien connues, elles ont été étudiées par M. M. Maroni et De Franchis et surtout par M. Severi<sup>2)</sup>.

Considérons une courbe  $C$  et une courbe  $L$ , et soit  $C'$  une courbe adjointe à  $C$ . On a

<sup>2)</sup> Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica . . . . Memorie della R. Accad. di Torino, 1903, 2<sup>ème</sup> s., t. LIV.

$$C' - C \equiv L.$$

Mais  $\{C\}$  est de degré zéro, par suite  $C$  rencontre  $L$  en quatre points qui sont aussi les points de rencontre de  $C'$  avec  $C$ . Donc, les courbes  $L$  marquent, sur une  $C$ , la série canonique de cette courbe.

Désignons par  $I_2$  l'involution d'ordre deux, sur  $F$ , formée par les couples des  $g_2^1$  spéciales existant sur les  $C$ . D'après ce qu'on vient de voir, toute courbe canonique  $L$  contient une simple infinité de ces groupes.

Soit  $F^*$  une surface représentative de  $I_2$ , c'est-à-dire une surface dont les points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de l'involution  $I_2$ . À une courbe  $C$  correspondra sur  $F^*$  une courbe rationnelle  $C^*$  et cette courbe engendrera un faisceau  $\{C^*\}$  de genre  $p$ . À une courbe canonique  $L$  correspondra sur  $F^*$  une courbe  $L^*$  d'un certain genre  $\pi$ . Cette courbe  $L^*$  appartiendra à un système linéaire  $|L^*|$  dont la dimension sera égale à la dimension  $p_g - 1$  de  $|L|$ ,  $p_g$  étant le genre géométrique de  $F$ . De plus une courbe  $L^*$  rencontrera une courbe  $C^*$  en deux points.

La surface  $F^*$  possédant un faisceau de genre  $p$  de courbes rationnelles  $C^*$ , elle est, d'après le théorème classique de Noether — Enriques, référible, par une transformation birationnelle, à une réglée de genre  $p$ .

2. Entre  $F^*$  et  $F$ , nous avons une correspondance (1, 2), et sur  $F^*$  il y aura une certaine courbe de diramation  $D$ , de genre  $\delta$  et de degré  $\nu$ , pour cette correspondance. On peut obtenir immédiatement une expression fonctionnelle pour cette courbe. Remarquons en effet que le nombre-base de  $F^*$  est égal à deux<sup>3)</sup>, car  $F^*$  est référible à une réglée. Or une courbe  $C^*$  et une courbe  $L^*$  sont indépendantes, car leur déterminant est, en désignant par  $n$  le degré de  $|L^*|$ ,

$$\begin{vmatrix} n & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Par suite,  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant des entiers, on a

$$\lambda D \equiv \lambda_1 C^* + \lambda_2 L^*.$$

<sup>3)</sup> Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica. Math. Ann., 1905, Bd. LXII.

Or, la série spéciale  $g_2^1$  existant sur une  $C$  possède huit points doubles, par suite,  $D$  rencontre une  $C^*$  en huit points. On a donc

$$8\lambda = 0 \cdot \lambda_1 + 2\lambda_2,$$

c'est-à-dire  $\lambda_2 = 4\lambda$ .

Pour obtenir  $\lambda_1$ , considérons la correspondance (1, 2) entre une  $L^*$  et la  $L$  correspondante. Il y a sur  $L^*$ ,  $\frac{2\lambda_1}{\lambda} + 4n$  diramations pour cette correspondance. Or,  $|L|$  étant de degré  $p^{(1)} - 1$ , le système  $|L^*|$  a le degré  $n = \frac{1}{2}(p^{(1)} - 1)$ . Par suite, une courbe  $L^*$  possède  $2\frac{\lambda_1}{\lambda} + 2(p^{(1)} - 1)$  points de diramation. Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance liant une  $L^*$  et une  $L$ . On a

$$4(\pi - 1) + 2\frac{\lambda_1}{\lambda} + 2(p^{(1)} - 1) = 2(p^{(1)} - 1),$$

car une courbe canonique  $L$  est de genre  $p^{(1)}$ . On en déduit

$$\lambda_1 = -2(\pi - 1)\lambda.$$

L'expression fonctionnelle de  $D$  est donc

$$\lambda D \equiv 4\lambda L^* - (2\pi - 2)\lambda C^*.$$

Par des formules bien connues, on en déduit les valeurs du genre  $\delta$  et du degré  $\nu$  de  $D$ :

$$\begin{aligned}\delta &= 3(p^{(1)} - 1) - 5(2\pi - 2) + 1, \\ \nu &= 8(p^{(1)} - 1) - 16(2\pi - 2).\end{aligned}$$

3. Connaissant les caractères de la courbe de diramation, on peut, par une formule de M. Severi<sup>4)</sup>, calculer la relation liant les genres arithmétiques de  $F^*$  et  $F$ . Or, le genre arithmétique de  $F^*$  est égal à  $-p$ , le genre arithmétique  $p_a$  de  $F$  pourra donc se calculer en fonction de  $p$ ,  $\delta$  et  $\nu$ , c'est-à-dire en fonction de  $p$ ,  $\pi$  et  $p^{(1)}$ . On a précisément

<sup>4)</sup> Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie.... Rend. Istituto Lomb., 1903, s. (2), t. XXXVI.

$$24(p_a + 1) - 48(1 - p) = 6(\delta - 1) + 3(2\delta - 2 - \nu),$$

c'est-à-dire,

$$p_a = \frac{p^{(1)} - 1}{2} - 2p - \pi + 2.$$

4. Retournons à la surface  $F^*$ . Sur cette surface, nous avons un système  $|L^*|$  de degré  $\frac{1}{2}(p^{(1)} - 1)$ , de genre  $\pi$  et de dimension  $p_g - 1$ . Or, le théorème de Riemann-Roch<sup>5)</sup> sur une surface réglée (on réfère à une réglée) de genre  $p$  donne l'inégalité

$$r \geq n - \pi - p + 1$$

entre la dimension  $r$ , le degré  $n$  et le genre  $\pi$  d'un système linéaire. Dans le cas actuel, nous avons donc

$$p_g - 1 \geq \frac{p^{(1)} - 1}{2} - \pi - p + 1,$$

ou

$$p^{(1)} = 2p_g + 2p + 2\pi - 3 - 2\varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  est entier positif ou nul.

On a alors

$$p_a = p_g - p - \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la surface  $F$  possède  $p + \varepsilon$  intégrales de Picard de première espèce linéairement indépendantes. Or, le long d'une courbe  $C$ , il est bien connu que  $p$  de ces intégrales restent constantes; les  $\varepsilon$  restantes donnant des intégrales abéliennes linéairement indépendantes de la  $C$  considérée.  $C$  étant de genre trois, on a  $\varepsilon \leq 3$ .

5. Pour avoir complètement établi le théorème énoncé dans le préambule, il nous reste à donner une limite supérieure de  $p_g$ . Ce sera l'objet de ce dernier paragraphe.

Entre le faisceau  $\{C^*\}$  et une courbe  $L^*$ , il y a une correspondance (1, 2). Si  $\eta$  est le nombre des courbes  $C^*$  touchant cette courbe  $L^*$ , on a, par la formule de Zeuthen

<sup>5)</sup> Sul teorema di Riemann-Roch sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie, par *F. Severi*. Atti Accad. Torino, 1905, t. XL.

$$\eta = 2(\pi - 1) - 4(p - 1).$$

On a évidemment  $\eta > 0$ , d'où

$$p < \frac{\pi + 1}{2}$$

Supposons qu'il existe une courbe  $L^*$  ayant  $\pi + 3 - 2p$  points doubles<sup>6)</sup> et étant par conséquent de genre effectif  $2p - 3$ . Entre cette courbe et le faisceau  $\{C^*\}$ , on a toujours une correspondance (2, 1) et on doit avoir (par la formule de Zeuthen):

$$2(2p - 3) - 4(p - 1) \geq 0.$$

Or, cela est impossible et il ne peut par conséquent exister de courbe  $L^*$  ayant  $\pi + 3 - 2p$  points doubles.

Imposer un point double à une  $L^*$  équivaut à trois conditions,  $\pi + 3 - 2p$  points doubles équivalent à  $3(\pi + 3 - 2p)$  conditions. Pour qu'il n'y ait pas de  $L^*$  ayant  $\pi + 3 - 2p$  points doubles, on doit donc avoir

$$p_g - 1 < 3(\pi + 3 - 2p),$$

c'est-à-dire

$$p_g \leq 3(\pi + 3 - 2p).$$

Goettingen, 12. Mars 1913.

---

<sup>6)</sup> En des points déterminés.