Bulletin de la Classe des sciences

Observation sur les surfaces non rationnelles de genres zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Une involution cyclique dépourvue de points unis, d'ordre sept, appartenant à une surface régulière ne peut avoir pour image une surface de genres $p_a = p_g = 0$.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Observation sur les surfaces non rationnelles de genres zéro. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 53, 1967. pp. 417-422;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1967.62887;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1967_num_53_1_62887;

Fichier pdf généré le 22/02/2024

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Observation sur les surfaces non rationnelles de genres zéro

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Une involution cyclique dépourvue de points unis, d'ordre sept, appartenant à une surface régulière ne peut avoir pour image une surface de genres $p_a = p_g = 0$.

Lorsque nous avons commencé nos recherches sur les surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 \geqslant 2$, nous avons cherché à généraliser une propriété de la surface d'Enriques, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, qui représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$. Cela nous a conduit à étudier les involutions cycliques privées de points unis, d'ordre $p = p_a + 1$, appartenant à une surface régulière de genre arithmétique p_a. Nous avons ainsi obtenu une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} = 2$, à courbes bicanoniques irréductibles, pour $p = 5$. Plus tard, reprenant l'étude directe des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, nous avons démontré que, si ses courbes bicanoniques sont irréductibles, elle est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 1$. Il semble donc que le premier procédé de recherche ne soit pas applicable lorsque p est impair supérieur à cinq. Nous allons établir dans cette note que le procédé n'est pas applicable pour $p = 7$. Le procédé utilisé est d'ailleurs applicable à tout nombre premier supérieur à sept. Nous nous bornons au cas $p = 7$ pour éviter des raisonnements très longs.

Nous démontrons précisément le théorème suivant : *Si une surface algébrique régulière de genre arithmétique* $p_a = 6$ *contient une involution privée de points unis d'ordre sept, l'image de cette involution ne peut être une surface de genres* $p_a = p_g = 0$(1).

1. Soit, s'il en existe une, F une surface de l'espace S_5, à cinq dimensions, dont le système canonique est constitué par le système des sections hyperplanes, transformée en soi par une homographie H de période sept, n'ayant que six points unis, l'image de l'involution I engendrée sur F par l'homographie H ayant pour image une surface F' de genres $p_a = p_g = 0$.

L'homographie H n'ayant que six points unis, ses équations s'écrivent sous la forme

$$x_1' : x_2' : \ldots : x_6' = \epsilon x_1 : \epsilon^2 x_2 : \ldots : \epsilon^6 x_6,$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre sept de l'unité.

On sait (voit la note du Circolo di Palermo) que la surface F est d'ordre 14. Il existe sur cette surface six sections hyperplanes appartenant à l'involution I, ce sont les sections C_1, C_2, ..., C_6 de la surface par les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_6 = 0$. Nous désignerons par K_1, K_2, ..., K_6 les courbes de genre trois et de degré deux qui leur correspondent sur F'. Ces six courbes sont linéairement indépendantes et isolées.

Le bigenre de la surface F est $P_2 = 21$ et le système bicanonique est découpé par les hyperquadriques de S_5. Aucune de ces hyperquadriques ne contient donc F. Le système bicanonique $|2C|$ de F contient sept systèmes linéaires appartenant à l'involution I.

Le bigenre de la surface F' est $P_2 = 3$ et son système bicanonique $|H|$ contient les trois courbes $K_1 + K_6$, $K_2 + K_5$, $K_3 + K_4$ qui le déterminent.

On a d'autre part

$$K_1' \equiv K_2 + K_6 \equiv K_3 + K_5 \equiv 2K_4,$$

$$K_2' \equiv 2K_1 \equiv K_3 + K_6 \equiv K_4 + K_5,$$

$$K'_3 = K_1 + K_2 = K_4 + K_6 = 2K_5,$$
$$K'_4 = 2K_2 = K_1 + K_3 = K_5 + K_6,$$
$$K'_5 = K_1 + K_4 = K_2 + K_3 = 2K_6,$$
$$K'_6 = 2K_3 = K_1 + K_5 = K_2 + K_4.$$

Aux systèmes déterminés par ces courbes correspondent sur F les systèmes compris dans le système bicanonique appartenant à l'involution I.

Observons que l'on a

$$| K''_1 | = | K_2 + K'_6 | = | K_2 + K_1 + K_5 |,$$
$$| K''_1 - K_1 | = | K_2 + K_5 | = | H |,$$

ce qui montre bien que le système $| H |$ est le système bicanonique de F'.

2. Le système tricanonique de F' est le système $| H' |$ et il contient les huit courbes $2K_1 + K_5$, $2K_2 + K_3$, $2K_3 + K_1$, $2K_4 + K_6$, $2K_5 + K_4$, $2K_6 + K_2$, $K_1 + K_2 + K_4$, $K_3 + K_5 + K_6$.

Or, le trigenre de F' est $P'_3 = 7$, par conséquent ces huit courbes sont liées entre elles par une relation linéaire. Cela signifie qu'au système triccanonique de F' correspond sur F un système découpé par les hypersurfaces cubiques

$$\lambda_1 x_1^2 x_5 + \lambda_2 x_2^2 x_3 + \lambda_3 x_3^2 x_1 + \lambda_4 x_4^2 x_6 + \lambda_5 x_5^2 x_4 + \lambda_6 x_6^2 x_2 + \lambda_7 x_1 x_2 x_4 + \lambda_8 x_3 x_5 x_6 = 0$$

et que l'une de ces hypersurfaces contient F. Nous la désignerons par V_0.

Sur la surface F', les courbes $3K_1$, $2K_2 + K_6$, $2K_3 + K_4$, $2K_4 + K_2$, $2K_6 + K_5$, $K_2 + K_3 + K_5$, $K_1 + K_4 + K_5$, $K_1 + K_3 + K_6$ appartiennent à un même système linéaire qui n'est autre que l'adjoint $| K''_3 |$ au système $| K'_3 |$.

Les systèmes $| K''_6 | = |3K_2 |$, $| K''_2 | = | 3K_3 |$, $| K''_5 | = | 3K_4 |$, $| K''_3 | = | 3K_5 |$, $| K''_4 | = | 3K_6 |$ contiennent également huit courbes formées de trois courbes K.

Le trigenre de la surface F est $P_3 = 49$ et le nombre des hypersurfaces cubiques de S_5 linéairement indépendantes est égal à 56, donc il y a sept hypersurfaces cubiques passant par F. Nous les désignerons par $V_0, V_1, \ldots, V_6$. Aux six dernières de ces hypersurfaces correspondent sur F′ des courbes appartenant aux systèmes $|K_1''|, |K_2''|, \ldots, |K_6''|$. Cela explique la présence de huit courbes formées au moyen des courbes K dans des systèmes de dimension six.

3. La surface F, d'ordre 14, est donc commune à sept hypersurfaces cubiques $V_0, V_1, \ldots, V_6$.

Considérons trois de ces hypersurfaces, par exemple V_0, V_1, V_2. Elles ont en commun en dehors de la surface F, une surface F″ d'ordre 13. Les hypersurfaces cubiques passant par F″ découpent sur F les courbes canoniques. Comme celles-ci sont les sections hyperplanes de F, on en conclut que F″ appartient à une hyperquadrique, mais cela ne nous sera pas utile dans la suite.

Les courbes canoniques de la surface F″ sont découpées par les hypersurfaces cubiques passant par F, c'est-à-dire par les hypersurfaces du système linéaire déterminé par V_3, V_4, V_5, V_6. La surface F″ a donc les genres $p_a'' = p_g'' = 4$.

Les courbes bicanoniques de F″ sont découpées par les hypersurfaces du sixième ordre passant doublement par la surface F, c'est-à-dire par les hypersurfaces du sixième ordre déterminées par les produits des hypersurfaces V_3, V_4, V_5, V_6 deux à deux. La surface F″ est régulière comme F et son bigenre est $P_2'' = 10$. Son genre linéaire est donc égal à $P_2'' - p_a'' = 6$.

Le système canonique de F″ est transformé en soi, comme F″, par l'homographie H et dans ce système, il y a quatre courbes transformées en elles-mêmes par cette homographie : ce sont les courbes découpées par les hypersurfaces V_3, V_4, V_5, V_6.

4. Les équations des hypersurfaces V_0, V_1, V_2 sont respectivement

$$a_1x_1^2x_5 + a_2x_2^2x_3 + a_3x_3^2x_4 + a_4x_4^2x_6 + a_5x_5^2x_4 + a_6x_6^2x_2 + a_7x_1x_2x_4 + a_8x_3x_5x_6 = 0,$$

$$b_1x_1^3 + b_2x_2^2x_6 + b_3x_3^2x_4 + b_4x_4^2x_2 + b_5x_6^2x_5 + b_6x_2x_3x_5 + b_7x_1x_4x_5 + b_8x_1x_3x_6 = 0,$$

$$c_1x_1^2x_4 + c_2x_2^3 + c_3x_4^2x_5 + c_4x_5^2x_3 + c_5x_6^2x_1 + c_6x_3x_4x_6 + c_7x_2x_5x_6 + c_8x_1x_2x_3 = 0.$$

Appelons O_i le sommet de la figure de référence dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i. Ce sont les points unis de l'homographie H.

La surface F'' ne passe pas par les points O_1, O_2 mais passe par les autres points unis de H.

En O_3, la surface F'' a un point double uniplanaire, le plan tangent étant $O_3O_2O_6$.

En O_4, la surface F'' a un point simple, le plan tangent étant $O_4O_1O_3$.

En O_5, la surface F'' a un point double uniplanaire, le plan tangent étant $O_5O_1O_2$.

Enfin en O_6, la surface passe simplement par ce point en y ayant comme plan tangent le plan $O_6O_3O_4$.

Considérons la section D de la surface F'' par l'hypersurface V_3 dont l'équation est

$$\begin{gathered} d_1x_2^2x_6 + d_2x_3^3 + d_3x_4^2x_1 + d_4x_5^2x_6 + d_5x_6^2x_4 \\ + d_6x_2x_3x_4 + d_7x_1x_5x_5 + d_8x_1x_2x_6 = 0. \end{gathered}$$

Cette courbe D ne passe pas par O_3. En O_4, elle touche la droite 0_4O_3 et en O_6, la droite O_6O_3. En O_5, l'hyperplan tangent à V_3 contient le plan tangent à F'' et la courbe D possède un point singulier. Son genre est donc inférieur à six.

La courbe D est transformée en elle-même par H et sur cette courbe, cette homographie engendre une involution d'ordre sept possédant au moins quatre points unis. Si x est le genre de l'image de cette involution, on doit avoir

$$14(x-1)+24 \leqslant 8,$$

ce qui est impossible pour x entier positif. On en conclut que la surface F envisagée au début ne peut exister, d'où le théorème énoncé.

Liège, le 28 avril 1967.

BIBLIOGRAPHIE

Voir nos travaux :

Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 2° sem. 1932, pp. 479-481).

Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1933, pp. 26-37).

Sur les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls (*Actualités scientifique*, N° 123, Paris, Hermann, 1935).

Sur les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1958, pp. 1-14).

Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1965, pp. 25-41).

Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications (Rome, Édit. Cremonese, 1963).