Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques (4e note)

Lucien Godeaux

Résumé
Formation de relations liant les invariants des équations de Laplace satisfaites par les points de la suite considérée.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques (quatrième note)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Formation de relations liant les invariants des équations de Laplace satisfaites par les points de la suite considérée.

On sait qu'à une surface (x) de l'espace ordinaire rapportée à ses sasymptotiques u, v, est associée dans l'espace à cinq dimensions une suite de Laplace L déterminée par les points représentant sur l'hyperquadrique de Klein les tangentes aux asymptotiques de la surface. Nous avons publié plusieurs travaux relatifs aux surfaces auxquelles sont associées des suites de Laplace périodiques, de période nécessairement paire $2n + 2$. Le cas $n = 2$, où il s'agit de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie et le cas $n = 3$, où il s'agit de surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, peuvent être considérés comme résolus [1]. Il n'en va pas de même des cas où n est supérieur à

[1] On trouvera un exposé de cette question dans notre mémoire sur *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8_0 de l'Académie roy. de Belgique, 1964, pp. 1-83). Les premières recherches sur le cas n = 2 sont dues à Demoulin (C.R. sept. 1908). Les nôtres datent de 1928.

3. Dans plusieurs notes consacrées à cette question (¹), nous avons établi des relations entre les invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont les différents points de la suite L. Dans cette note, nous établissons de nouvelles relations entre ces invariants.

1. Considérons dans l'espace S_5 à cinq dimensions la suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

associée à une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La condition pour que deux points p,q de S_5 soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q de Klein s'exprime par la relation

$$\Omega\,(p,q) = 0.$$

Nous poserons

$$(m,n) = \Omega\,(U^m, V^n).$$

Rappelons que l'on a

$$(n,n-2) = 0,\ (n,n-1) = 0,\ (n,n) = 0,$$
$$(n,n+1) = 0,\ (n,n+2) = 0.$$

Sept points $U^{n+3}, U^{n+2}, \ldots, U^{n-3}$ consécutifs de la suite L sont liés par une relation linéaire

$$\lambda_{n+3}U^{n+3} + \lambda_{n+2}U^{n+2} + \lambda_{n+1}U^{n+1} + \lambda_n U^n + \lambda_{n-1}U^{n-1}$$
$$+ \lambda_{n-2}U^{n-2} + \lambda_{n-3}U^{n-3} = 0.$$

En exprimant les relations de polarité avec les points V^{n+3}, $V^{n+2}, \ldots, V^{n-2}$, on obtient les équations

$$\lambda_n(n,n+3) + \lambda_{n-1}(n-1,n+3) + \lambda_{n-2}(n-2,n+3)$$
$$+ \lambda_{n-3}(n-3,n-3) = 0,$$

(¹) *Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1964 pp. 842-849, 920-925, 1121-1126), *Sur les surfaces liées à une suite de Laplace périodique* (Archiv der Mathematik, 1965, pp. 117-121), *Surfaces associées à une suite de Laplace périodique* (Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 687-690).

$$\begin{aligned}
&\lambda_{n-1}(n-1,n+2)+\lambda_{n-2}(n-2,n+2)\\
&\qquad\qquad+\lambda_{n-3}(n-3,n+2)=0,\\
&\lambda_{n-2}(n-2,n+1)+\lambda_{n-3}(n-3,n+1)=0,\\
&\lambda_{n+3}(n+3,n)+\lambda_{n-3}(n-3,n)=0,\\
&\lambda_{n+3}(n+3,n-1)+\lambda_{n+2}(n+2,n-1)=0,\\
&\lambda_{n+3}(n+3,n-2)+\lambda_{n+2}(n+2,n-2)\\
&\qquad\qquad+\lambda_{n+1}(n+1,n-2)=0.
\end{aligned}$$

Ces relations permettent de déterminer les λ et on obtient l'équation

$$\begin{aligned}
&(n-3,n)(n-2,n+1)(n-1,n+2)(n,n+3)\times\\
&\times\begin{vmatrix} U^{n+3} & U^{n+2} & U^{n+1}\\ (n+3,n-1) & (n+2,n-1) & 0\\ (n+3,n-2) & (n+2,n-2) & (n+1,n-2)\end{vmatrix}\\
&+(n+3,n)(n+2,n-1)(n+1,n-2)\times \qquad\qquad (1)\\
&\times\begin{vmatrix} U^{n} & U^{n-1} & U^{n-2} & U^{n-3}\\ (n,n+3) & (n-1,n+3) & (n-2,n+3) & (n-3,n+3)\\ 0 & (n-1,n+2) & (n-2,n+2) & (n-3,n+2)\\ 0 & 0 & (n-2,n+1) & (n-3,n+1)\end{vmatrix}=0.
\end{aligned}$$

2. Supposons que la suite L soit périodique et soit de période $2n+2$. Alors le point V^{n+1} coïncide avec le point U^n et le point U^{n+1} avec V^n. Ces deux points appartiennent d'ailleurs à l'hyperquadrique Q. Dans ces conditions, la suite V^{n-4} $V^{n-3}, \ldots,$ V^{n-2} coïncide avec la suite $U^{n+3}, \ldots, U^{n-3}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
&(n+1,n-2)(n+2,n-1)(n+3,n)(n+4,n+1)\times\\
&\times\begin{vmatrix} V^{n-4} & V^{n-3} & V^{n-2}\\ (n,n+4) & (n,n+3) & 0\\ (n-1,n+4) & (n-1,n+3) & (n-1,n+2)\end{vmatrix}\\
&+(n+1,n+4)(n,n+3)(n-1,n+2)\times
\end{aligned}$$

$$
\times \begin{array}{cccc}
V^{n+1} & V^{n} & V^{n-1} & V^{n-2} \\
\end{array}
\left| \begin{array}{cccc}
(n+4,\ n+1) & (n+4,\ n) & (n+4,\ n-1) & (n+4,\ n-2) \\
0 & (n+3,\ n) & (n+3,\ n-1) & (n+3,\ n-2) \\
0 & 0 & (n+2,\ n-1) & (n+2,\ n-2)
\end{array} \right| = 0.
$$

Dans une note précédente, nous avons établi que l'on a

$$\lambda V^{i} = 2K_{i}U^{2n+1-i},$$

où nous posons $\qquad K_{i} = 2ak_{1}k_{2} \ldots k_{i}.$

La relation précédente donne alors une relation (II) entre les points $U^{n-3} \ldots U^{n+3}$ que l'on obtient en remplaçant dans l'équation précédente le premier et le deuxième déterminants respectivement par

$$
k_{n-1}k_{n}k_{n+1}k_{n+2}
\left| \begin{array}{ccc}
k_{n+3}k_{n+4}U^{n-3} & k_{n+3}U^{n-2} & U^{n-1} \\
(n,\ n+4) & (n,\ n+3) & 0 \\
(n-1,\ n+4) & (n-1,\ n+3) & (n-1,\ n+2)
\end{array} \right|,
$$

$$
\left| \begin{array}{cccc}
k_{n-1}k_{n}k_{n+1}U^{n} & k_{n-1}k_{n}U^{n+1} & k_{n-1}U^{n+2} & U^{n+3} \\
(n+4,\ n+1) & (n+4,\ n) & (n+4,\ n-1) & (n+4,\ n-2) \\
0 & (n+3,\ n) & (n+3,\ n-1) & (n+3,\ n-2) \\
0 & 0 & (n+2,\ n-1) & (n+2,\ n-2)
\end{array} \right|.
$$

Cette nouvelle relation (II) doit être identique à la relation (I), c'est-à-dire que les cœfficients des mêmes termes doivent être proportionnels.

3. Les rapports des cœfficients de U^{n+3}, U^{n-3}, U^{n+2}, U^{n-2} dans les équations (II) et (I) sont respectivement

$$\frac{(n+1,\ n+4)(n+4,\ n+1)(n+3,\ n)}{(n-3,\ n)(n-2,\ n+1)(n+1,\ n-2)},$$

$$\frac{(n+4,\ n+1)}{(n-2,\ n+1)}\, k_{n-1}k_{n}k_{n+1}k_{n+2}k_{n+3}k_{n+4},$$

$$\frac{(n+1,\ n+4)(n+4,\ n+1)(n+3,\ n)(n+2,\ n-2)}{(n-3,\ n)(n-2,\ n+1)(n+3,\ n-1)(n+1,\ n-2)}\, k_{n-1},$$

$$\frac{(n+4,\ n+1)(n,\ n+4)}{(n,\ n+3)(n-3,\ n+1)}\, k_{n-1}k_{n}k_{n+1}k_{n+2}k_{n+3}.$$

En égalant les deux premiers rapports, on a

$$(n+1, n+4)(n+3, n)$$
$$= (n-3, n)(n+1, n-2)\, k_{n-1}k_nk_{n+1}k_{n+2}k_{n+3}k_{n+4}.$$

On a, comme nous l'établirons plus loin,

$$(n-1, n+4) = 2(-1)^n\, \mathrm{H}_{n+1}\, \varDelta,$$
$$(n+3, n) = 2(-1)^n\, \mathrm{K}_n\, \varDelta,$$
$$(n-3, n) = 2(-1)^n\, \mathrm{H}_{n-3}\, \varDelta,$$
$$(n+1, n-2) = 2(-1)^n\, \mathrm{K}_{n-2}\, \varDelta,$$

où nous avons posé

$$\mathrm{H}_n = 2bh_1\, h_2 \dots h_n$$

et où

$$\varDelta = |\, x\, x_u\, x_v\, x_{uv}\, |$$

est une constante.

La relation précédente devient

$$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{K}_n = \mathrm{H}_{n-3}\mathrm{K}_{n-2}k_{n-1}k_nk_{n+1}k_{n+2}k_{n+3}k_{n+4},$$

c'est-à-dire

$$h_{n-2}h_{n-1}h_nh_{n+1} = k_{n-1}k_{n+2}k_{n+3}k_{n+4}.$$

Les points U^{n-i} et V^{n-i+1} coïncidant, les invariants des équations de Laplace auxquelles ils satisfont sont égaux et on a

$$h_{n-i+1} = k_{n-i-1}.$$

La relation précédente est donc une identité.

4. En égalant le second et le troisième rapports, nous obtenons

$$(n+1, n+4)(n+3, n)(n+2, n-2)$$
$$= (n-3, n)(n+3, n-1)(n+1, n-2)k_{n-1}k_n \dots k_{n+4}.$$

Comme nous l'établirons plus loin, on a

$$(n+1, n+4) = 2(-1)^n\mathrm{H}_{n+1}\, \varDelta,$$
$$(n+3, n) = 2(-1)^n\mathrm{K}_n\, \varDelta,$$
$$(n+2, n-2) = 2(-1)^n\mathrm{K}_{n-2}(\overline{\mathrm{K}}_v^{n-2} - \overline{\mathrm{H}}_v^{n+1})\, \varDelta,$$
$$(n-3, n) = 2(-1)^n\mathrm{H}_{n-3}\, \varDelta,$$

$$(n+1,\, n-2) = 2(-1)^{n}\mathrm{K}_{n-2}\,\Delta,$$

$$(n+3,\, n-1) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{K}_{n-1}(\overline{\mathrm{K}}_v^{n-1} - \overline{\mathrm{H}}_v^{n+2})\,\Delta.$$

On en déduit

$$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{K}_n\mathrm{K}_{n-2}(\overline{\mathrm{K}}_v^{n-2} - \overline{\mathrm{H}}_v^{n+1}) + \mathrm{H}_{n+3}\mathrm{K}_{n-2}\mathrm{K}_{n-1}(\overline{\mathrm{K}}_v^{n-1} - \overline{\mathrm{H}}_v^{n+2}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$h_{n-2}h_{n-1}h_nh_{n+1}h_{n+2}(\overline{\mathrm{K}}_v^{n-2} - \overline{\mathrm{H}}_v^{n+1}) + \overline{\mathrm{K}}_v^{n-1} - \overline{\mathrm{H}}_v^{n+2} = 0. \qquad \text{(A)}$$

Rappelons que nous avons posé dans nos notes antérieures

$$\overline{\mathrm{H}}^n = \log\,.\, b^{n+1}h_1^n \dots h_{n-1}^2h_n\,,\quad \overline{\mathrm{K}}^n = \log\,.\, a^{n+1}k_1^n \dots k_{n-1}^2k_n.$$

5. L'égalité des second et quatrième rapports donne

$$(n,\, n+4)(n-2,\, n+1) = (n,\, n+3)(n-3,\, n+1)k_{n-4}.$$

On a

$$(n,\, n+4) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{H}_n(\overline{\mathrm{H}}_u^n - \overline{\mathrm{K}}_u^{n+3})\,\Delta,$$

$$(n-2,\, n+1) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{H}_{n-2}\,\Delta,$$

$$(n,\, n+3) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{H}_n\,\Delta,$$

$$(n-3,\, n+1) = 2(-1)^{n}\mathrm{H}_{n-3}(\overline{\mathrm{H}}_u^{n-3} - \overline{\mathrm{K}}_u^n)\,\Delta.$$

On obtient donc

$$\mathrm{H}_{n-2}\mathrm{H}_n(\overline{\mathrm{H}}_u^n - \overline{\mathrm{K}}_u^{n+3}) = \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n-3}(\overline{\mathrm{H}}_u^{n-3} - \overline{\mathrm{K}}_u^n)k_{n-4},$$

c'est-à-dire, puisque $k_{n-4} = h_{n-2}$,

$$\overline{\mathrm{H}}_u^n + \overline{\mathrm{H}}_u^{n-3} = \overline{\mathrm{K}}_u^{n+3} + \overline{\mathrm{K}}_u^n. \qquad \text{(B)}$$

Remarquons qu'en dérivant l'équation précédente par rapport à v, on obtient

$$h_{n-1} + h_{n-2} = k_{n+4} + k_{n+1},$$

ce qui est une identité.

6. En identifiant les relations liant les points $\mathrm{U}^{n+4} \dots \mathrm{U}^{n-2}$ et $\mathrm{V}^{n+3} \dots \mathrm{V}^{n-3}$, on obtiendrait de même

$$k_{n-2}k_{n-1}k_nk_{n+1}k_{n+2}(\overline{\mathrm{H}}_u^{n-2} - \overline{\mathrm{K}}_u^{n+1}) + \overline{\mathrm{H}}_u^{n-1} - \overline{\mathrm{K}}_u^{n+2} = 0, \qquad \text{(A}_1\text{)}$$

$$\overline{\mathrm{K}}_v^n + \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3} = \overline{\mathrm{H}}_v^{n-3} + \overline{\mathrm{H}}_v^n. \qquad \text{(B}_1\text{)}$$

7. Il nous reste à établir les formules utilisées plus haut.

En dérivant les équations $(n-1, n-3) = 0$, $(n-2, n-4) = 0$ par rapport à v, on obtient

$$(n, n-3) + k_{n-3}(n-1, n-4) = 0,$$

$$(n-1, n-4) + k_{n-4}(n-2, n-5) = 0,$$

d'où

$$(n, n-3) - k_{n-3}k_{n-4}(n-2, n-5) = 0.$$

On est conduit à poser

$$(n, n-3) = (-1)^{n-1}\mathrm{K}_{n-3}(3, 0).$$

On a $(3, 0) = \Omega\,(\mathrm{U}^3, \mathrm{V})$. En dérivant l'équation $\Omega\,(\mathrm{U}^2, \mathrm{V}) = 0$ par rapport à v, on a

$$\Omega\,(\mathrm{U}^3, \mathrm{V}) - 2a\,\Omega\,(\mathrm{U}^2, \mathrm{U}) = 0.$$

Comme $\Omega\,(\mathrm{U}^2, \mathrm{U}) = 2\varDelta$, il vient

$$(3, 0) = 4a\varDelta$$

et

$$(n, n-3) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{K}_{n-3}\varDelta.$$

On obtiendrait de même, en remarquant que $\Omega\,(\mathrm{V}^2, \mathrm{V}) = -2\varDelta$,

$$(n-3, n) = 2(-1)^{n}\mathrm{H}_{n-3}\varDelta.$$

8. Rappelons tout d'abord que dans nos notes antérieures, nous avons posé

$$\mathrm{H}^n = \log. bh_1h_2 \ldots h_n \quad , \quad \mathrm{K}^n = \log. ak_1k_2 \ldots k_n.$$

Dérivons les relations

$$(n-1, n-4) = 2(-1)^n\mathrm{K}_{n-4}\varDelta \quad , \quad (n-2, n-5) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{K}_{n-5}\varDelta$$

par rapport à v. Il vient

$$(n, n-4) + k_{n-4}(n-1, n-5) = 2(-1)^n\mathrm{K}_{n-4}(\mathrm{K}_v^{n-3} - \mathrm{H}_v^{n-1})\varDelta,$$

$$(n-1, n-5) + k_{n-5}(n-2, n-6) = 2(-1)^n\mathrm{K}_v^{n-5}(\mathrm{K}^{n-3} - \mathrm{H}_v^{n-2})\varDelta,$$

d'où

$$(n, n-4) - k_{n-4}k_{n-5}(n-2, n-6)$$
$$= 2(-1)^n\mathrm{K}_{n-4}(\mathrm{K}_v^{n-4} + \mathrm{K}_v^{n-5} - \mathrm{H}_v^{n-1} - \mathrm{H}_v^{n-2})\varDelta.$$

On est conduit à poser

$$(n, n-4) = (-1)^{n-1}\mathrm{K}_{n-4}(4, 0)$$
$$= 2(-1)^{n}\mathrm{K}_{n-4}[\mathrm{K}_v^{n-4} + \mathrm{K}_v^{n-5} + \ldots + \mathrm{K}_v^{1} - \mathrm{H}_v^{n-1}$$
$$- (\mathrm{H}_v^{n-2} + \mathrm{H}_v^{n-3} + \ldots + \mathrm{H}_v^{4})]\varDelta.$$

De $\Omega\,(\mathrm{U}^3, \mathrm{V}) = 4a\varDelta$, on déduit en dérivant par rapport à v,

$$\Omega\,(\mathrm{U}^4, \mathrm{V}) + h_3\,\Omega\,(\mathrm{U}^3, \mathrm{V}) - 2a\,\Omega\,(\mathrm{U}^3, \mathrm{U}) = 4a(\log.a)_v\varDelta.$$

De la relation qui lie les points U^3, U^2, ..., V^2, on déduit

$$\Omega\,(\mathrm{U}^3, \mathrm{U}) = -2\overline{\mathrm{H}}_v^2\varDelta$$

et on a donc

$$(4, 0) = \Omega\,(\mathrm{U}^4, \mathrm{V}) = 4a\,(\log.a)_v - (\log.b^3h_1^2h_2h_3)_v\,\varDelta.$$

Par suite

$$(n, n-4) = 2(-1)^{n}\mathrm{K}_{n-4}(\overline{\mathrm{K}}_v^{n-4} - \overline{\mathrm{H}}_v^{u-1})\varDelta.$$

On obtiendrait de même

$$(n-4, n) = 2(-1)^{n-1}\mathrm{H}_{n-4}(\overline{\mathrm{H}}_u^{n-4} - \overline{\mathrm{K}}_u^{n-1})\varDelta.$$

Liège, le 6 décembre 1967.