Bulletin de la Classe des sciences

Une surface déduite de la surface de Steiner

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface de genres pa = pg = 3 ; P2 = 8, p(1) = 5, transformée rationnelle d'une surface de Steiner.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une surface déduite de la surface de Steiner.

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface de genres $p_a = p_g = 3$; $P_2 = 8$, $p^{(1)} = 5$, transformée rationnelle d'une surface de Steiner.

Dans des travaux récents, nous avons montré qu'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 \geqslant 3$, possédant un système bicanonique irréductible, était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface possédant une seule courbe canonique (¹). Cela nous a conduit à rechercher la construction de surfaces possédant cette dernière propriété. Précisément, il s'agit de construire des surfaces d'ordre $8(\pi - 1)$ situées dans un espace à $2\pi - 1$ dimensions, dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques, possédant une seule courbe canonique d'ordre $4(\pi - 1)$, de genre $2\pi - 1$, le long de laquelle un hyperplan touche la surface.

Dans le cas le plus simple, $\pi = 3$, on peut supposer, F_k désignant une forme algébrique en $x_0, x_1, \ldots, x_5$, de degré k, que la surface est représentée, dans un espace à cinq dimensions, par les équations

$$F_2 = 0, \quad F_2' = 0, \quad F_1F_3 + (F_2'')^2 = 0,$$

(¹) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 1965, pp. 25-41).

l'hyperplan $F_1 = 0$ touchant la surface le long de la courbe canonique

$$F_2 = 0, \quad F_2' = 0, \quad F_2'' = 0$$

d'ordre huit et de genre cinq.

Nous avons cherché à déterminer cette surface dans l'hypothèse où les hyperquadriques $F_2 = 0$, $F_2' = 0$ sont générales et sans relation entre elles. La réponse est négative. Nous avons trouvé une surface de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 8$. Il nous a paru intéressant d'exposer les résultats obtenus [1].

1. Considérons dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, la surface F intersection de deux hyperquadriques

$$F_2(x_0, x_1, \ldots, x_5) = 0, \quad F_2'(x_0, x_1, \ldots, x_5) = 0 \tag{1}$$

et d'une hypersurface du quatrième ordre d'équation

$$x_0 F_3(x_0, x_1, \ldots, x_5) + [F_2''(x_0, x_1, \ldots, x_5)]^2 = 0. \tag{2}$$

La surface F contient la courbe C d'équations

$$x_0 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_2' = 0, \quad F_2'' = 0,$$

qui est d'ordre huit et de genre cinq, le long de laquelle l'hyperplan $x_0 = 0$ touche la surface. Les sections hyperplanes découpent sur C la série canonique.

La question que nous nous sommes posée est de déterminer l'hypersurface (2) de telle sorte que la courbe C soit une courbe canonique de la surface, les hyperquadriques (1) étant générales et sans relation entre elles. Les sections hyperplanes de la surface F sont dans ces conditions des courbes bicanoniques de celle-ci.

---

[2] Nous avons construit deux surfaces possédant une seule courbe canonique de genre cinq dans deux notes : *Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1959, pp. 441-446 ; 1962, pp. 785-791). Dans le premier cas, les hyperquadriques $F_2 = 0$, $F'_2 = 0$ étaient des cônes, dans le second, la surface était double.

2. F. Enriques (1) a montré qu'en projetant la variété V_3^4 intersections des hyperquadriques (1) d'une droite appartenant à cette variété, sur un espace à trois dimensions S_3, on obtient une représentation point par point de la variété sur cet espace, dans laquelle aux hyperplans de S_5 correspondent des surfaces cubiques passant par une quintique Γ de genre deux. Nous désignerons par f_3, f_3', f_3'', ... ces surfaces cubiques.

La quintique Γ est tracée sur une quadrique $\underset{\sim}{Q}$ et une surface f_3 contient une génératrice rectiligne de $\underset{\sim}{Q}$ trisécante de la courbe Γ. En partant d'un sixain de la surface f_3 contenant cette trisécante, on représente point par point la surface f_3 sur un plan σ par les cubiques γ_3 passant par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, la courbe correspondant à Γ étant une courbe du sixième ordre $\overline{\gamma}_6$ ayant un point triple en A_1 et des points doubles en $A_2, A_3, \ldots, A_6$.

A la section de f_3 par la surface f_3' correspond une courbe qui contient comme partie la courbe $\overline{\gamma}_6$ et qui est complétée par une cubique γ_3' passant par les points $A_2, A_3, \ldots, A_6$. L'intersection des surfaces f_3, f_3', en dehors de la courbe Γ, est donc une courbe du quatrième ordre, elliptique, s'appuyant en huit points sur la courbe Γ.

Trois surfaces f_3, f_4', f_3'' se coupent en quatre points en dehors de Γ.

A une hyperquadrique de S_5 distincte des hyperquadriques (1) correspond dans S_3 une surface f_6 du sixième ordre passant deux fois par la quintique Γ. La section de f_6 par f_3 est représentée sur σ par une sextique passant deux fois par les points $A_2, A_3, \ldots, A_6$. L'intersection des surfaces f_3 et f_6 en dehors de Γ est donc une courbe du huitième ordre et de genre cinq, s'appuyant en seize points sur Γ.

3. A la surface F correspond dans S_3 une surface F' d'équation

$$f_3 f_8 - (f_6)^2 = 0,$$

$f_9 = 0$ étant une surface d'ordre neuf passant trois fois par Γ.

(1) *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (RENDICONTI R. ACCADEMIA DEI LINCEI, 1e sem. 1894, pp. 481-487 ; Memorie scelte di Geometria, Bologne, 1956, pp. 125-139).

Les adjointes à la surface F′, d'ordre 12, passant quatre fois par Γ, sont des surfaces d'ordre huit passant trois fois par Γ. Ces surfaces contiennent comme partie fixe la quadrique Q et sont complétées par des surfaces f'_6 passant deux fois par Γ.

A la courbe C correspond la courbe C′ d'équations

$$f_3 = 0, \quad f_6 = 0.$$

Pour que la courbe C′ soit une courbe canonique de F′, il faut que la surface $f_6 = 0$ soit une adjointe à F′, c'est-à-dire que l'intersection des surfaces f_6, f_9 soit une courbe double pour f_9, donc pour F′.

Cette courbe double Δ est d'ordre 12 et forme l'intersection complète des surfaces f_6, f_9. Elle s'appuie en 24 points sur Γ.

4. Retournons à la surface F. A la courbe Δ correspond une courbe double de F située, comme courbe simple sur la variété V_3^4 commune aux hyperquadriques (1) et sur la variété $F_3 = 0$. Celles-ci doit donc posséder une variété double à trois dimensions d'ordre trois. Il en résulte que l'hypersurface F_3 se décompose en trois hyperplans.

Par un choix convenable de la figure de référence, l'équation de l'hypersurface (2) peut s'écrire

$$x_0 x_1 x_2 x_3 + (F''_2)^2 = 0.$$

5. Nous désignerons par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_5$ les surfaces cubiques de S_3, passant par Γ, correspondant respectivement aux hyperplans $x_0 = 0$, $x_1 = 0, \ldots, x_5 = 0$. L'équation de la surface F′ s'écrit

$$\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + (f_6)^2 = 0.$$

Cette surface a comme courbe quadruple la quintique Γ et comme courbes doubles les intersections des surfaces φ_1, φ_2, φ_3 prises deux à deux. Ce sont des quartiques elliptiques que nous désignerons par $\Gamma_1(\varphi_2 = \varphi_3 = 0)$, $\Gamma_2(\varphi_3 = \varphi_1 = 0)$ et $\Gamma_3(\varphi_1 = \varphi_2 = 0)$.

Les adjointes à la surface F′ sont les surfaces

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0$$

et la surface $f_6 = 0$ doit être une de ces adjointes. On doit donc poser

$$f_6 = a_1\varphi_2\varphi_3 + a_2\varphi_3\varphi_1 + a_3\varphi_1\varphi_2$$

Dans S_5, l'équation de l'hypersurface (2) s'écrit

$$x_0x_1x_2x_3 + (a_1x_2x_3 + a_2x_3x_4 + a_3x_1x_2)^2 = 0$$

C'est donc la projection à partir d'une droite d'une surface de Steiner. Cela étant, en modifiant nos notations, nous écrirons l'équation de l'hypersurface (2) sous la forme

$$x_0x_1x_2x_3 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 = 0$$

L'équation de la surface F′ devient donc

$$\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 = 0$$

L'équation des adjointes reste la même et la surface F′ a le genre géométrique $p_g = 3$.

Observons que chacune des surfaces

$$\varphi_0 + 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 0, \qquad \varphi_0 + 2(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

$$\varphi_0 + 2(-\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) = 0, \quad \varphi_0 + 2(-\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) = 0$$

touche F′ le long d'une courbe canonique.

6. Les surfaces biadjointes à F′ sont des surfaces d'ordre 16 passant six fois par Γ et deux fois par Γ_1, Γ_2, Γ_3. Elles contiennent comme partie fixe la quadrique Q comptée deux fois et sont complétées par des surfaces d'ordre 12 passant quatre fois par Γ et deux fois par Γ_1, Γ_2, Γ_3. Elles appartiennent donc au système linéaire déterminé par F′ mais, comme on sait, cette surface doit être décomptée.

Parmi les biadjointes à F′ se trouvent les surfaces

$$\lambda_{11}\varphi_2^2\varphi_3^2 + \lambda_{22}\varphi_3^2\varphi_1^2 + \lambda_{33}\varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2\varphi_3(\lambda_{23}\varphi_1 + \lambda_{31}\varphi_2 + \lambda_{12}\varphi_3 = 0 \quad (3)$$

D'autre part, les surfaces

$$\mu_0\varphi_0 + \mu_1\varphi_1 + \dots + \mu_5\varphi_5 = 0$$

découpent la série canonique sur les courbes canoniques.

Observons que les surfaces

$$\mu_0\varphi_0 + \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3 = 0$$

sont les parties variables des surfaces

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3(\mu_0\varphi_0 + \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3) = 0,$$

qui appartiennent au système (3) pour $\mu_0 = 0$. Quant à la surface $\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 = 0$, en la combinant avec l'équation de F', elle rentre également dans le système (3).

Aux surfaces (3), il faut adjoindre les surfaces

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3(\mu_4\varphi_4 + \mu_5\varphi_5) = 0$$

On trouve donc huit biadjointes linéairement indépendantes et le bigenre de F' est $P_2 = 8$.

Si p_a est le genre arithmétique de F', on a

$$P_2 = p_a + p^{(1)}, \quad p^{(1)} = 5$$

et par suite $p_a = 3$. La surface F' est régulière.

Les sections hyperplanes de la surface F sont des courbes bicanoniques, mais elles ne forment pas le système bicanonique complet.

Liège, le 20 janvier 1965.

(1) Voir note 1, page 136.