Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces représentées par des matrices de formes linéaires

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des genres d'une surface de l'espace à quatre dimensions représentée par l'égalité à zéro d'une matrice à n lignes et n+1 colonnes de formes linéaires.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces représentées par des matrices de formes linéaires

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination des genres d'une surface de l'espace à quatre dimensions représentée par l'égalité à zéro d'une matrice à n lignes et n + 1 colonnes de formes linéaires.

Dans une note déjà ancienne (¹), nous avons étudié la transformation birationnelle entre deux espaces à n dimensions dont les points correspondants sont homologues dans n corrélations entre ces espaces. Aux hyperplans de chaque espace correspondent dans l'autre des hypersurfaces d'ordre n passant par une variété à $n - 2$ dimensions, d'ordre $\frac{1}{2}n(n+1)$, représentée par l'évanouissement d'une matrice à n lignes et $n+1$ colonnes de formes linéaires. Dans des recherches récentes, nous avons rencontré les sections de cette variété par un espace à quatre dimensions et l'objet de cette note est de déterminer les genres des surfaces ainsi obtenues.

Une, F_n, de ces surfaces étant donnée, il est assez facile de déterminer le système adjoint au système des sections hyper-

(¹) *Sur une correspondance crémonienne entre deux espaces à n dimensions* (Rendiconti del Istituto Lombardo di Scienze et Lettere, 1910, pp. 116-119).

planes et par suite le système canonique de la surface ainsi que la valeur du genre géométrique. La surface est d'ailleurs régulière. La détermination du genre linéaire est moins simple et nous avons été conduit à utiliser la transformation birationnelle dont il est question ci-dessus mais entre deux espaces à $n + 1$ dimensions. Nous obtenons le théorème suivant :

La surface de l'espace à quatre dimensions représentée par l'égalité à zéro d'une matrice à n lignes et n + 1 colonnes de formes linéaires a les genres.

$$p_a = p_g = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(3n+4),$$

$$p^{(1)} = \frac{1}{24} n(n-1)(21n^2 - 139n + 226) + 1$$

1. Nous désignerons par F_n la surface de l'espace à quatre dimensions représentée par les équations

$$\left\| \varphi_{k1} \quad \varphi_{k2} \cdots \varphi_{kn+1} \right\| = 0 \tag{1}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

où les φ_{ki} sont des formes linéaires en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, le premier membre étant une matrice à n lignes et $n + 1$ colonnes. Nous supposerons $n \geq 3$.

La surface F_n est d'ordre $\frac{1}{2}n(n+1)$ et appartient à $n + 1$ hypersurfaces d'ordre n représentées par les déterminants obtenus en supprimant chaque fois une colonne de la matrice (1).

Représentons par Δ_i le déterminant obtenu en supprimant la *i-ième* colonne de la matrice (1). Les hypersurfaces d'équations $\Delta_n = 0$, $\Delta_{n+1} = 0$ ont en commun la surface F_n et une surface représentées par les équations

$$\left\| \varphi_{1i} \quad \varphi_{2i} \cdots \varphi_{ni} \right\| = 0, \tag{2}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

c'est-à-dire par l'égalité à zéeo d'une matrice à $n - 1$ lignes et n colonnes, donc une surface F_{n-1} d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)n$.

Nous désignerons par C_n les sections hyperplanes de la surface F_n et par C_{n-1} celles de la surface F_{n-1}.

2. Coupons par un hyperplan ; nous obtenons une courbe C_n et une courbe C_{n-1} formant l'intersection de deux surfaces d'ordre n. Ces deux courbes se coupent en $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ points.

La série canonique de la courbe C_n est découpée par les surfaces d'ordre $2n-4$ passant par la courbe C_{n-1}. Si π_n désigne le genre de la courbe C_n, on a

$$2\pi_n - 2 = \frac{1}{3}n(n+1)(2n-5)$$

d'où

$$\pi_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3).$$

De même, la série canonique de la courbe C_{n-1} est découpée par les surfaces d'ordre $2n-4$ passant par la courbe C_n. En désignant par π_{n-1} le genre de la courbe C_{n-1}, on a

$$2\pi_{n-1} - 2 = \frac{1}{3}(n-1)n(2n-7),$$

d'où

$$\pi_{n-1} = \frac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n+1),$$

formule qui se déduit de la précédente en remplaçant n par $n-1$.

Observons que les surfaces d'ordre $2n-4$ linéairement indépendantes passant par C_{n-1} et ne contenant pas comme partie les surfaces d'ordre n contenant C_n et C_{n-1} sont au nombre de π_n, comme on le calcule aisément.

Les surfaces d'ordre $2n-4$ linéairement indépendantes ne contenant pas comme partie les surfaces d'ordre n contenant C_n et C_{n-1} sont au nombre de

$$\binom{2n-1}{3} - 2\binom{n-1}{3} = (n-1)(n^2-n-1).$$

La série découpée par ces surfaces sur la courbe C_{n-1} est d'ordre $(n-2)(n-1)n$ et de dimensions $\pi_n - 1$. Comme on a

$$\pi_n - \pi_{n-1} = n(n-2)$$

on en conclut que les surfaces considérées découpent sur la courbe C_{n-1} une série non spéciale.

3. Reprenons les surfaces F_n et F_{n-1}. Elles ont en commun une courbe D_n d'ordre $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ dont nous désignerons le genre par ρ_n.

Les hypersurfaces d'ordre $2n-4$ passant par F_n et ne contenant pas comme partie les hypersurfaces d'ordre n contenant F_n et F_{n-1} découpent, sur F_{n-1}, les adjointes C'_{n-1} aux courbes C_{n-1}. Ces hypersurfaces contiennent la courbe D_n et on a donc

$$2(n-2)C_{n-1} \equiv D_n + C'_{n-1}.$$

La surface F_{n-1} appartient à deux hypersurfaces d'ordre $n-1$ qui ont encore en commun une surface F_{n-2}, d'ordre $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ coupant la surface F_{n-1} suivant une courbe D_{n-1} d'ordre $\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n$.

Les hypersurfaces d'ordre $2n-6$ contenant F_{n-2} mais non comme partie les hypersurfaces d'ordre n − 1 contenant F_{n-2} et F_{n-1}, découpent sur F_{n-1} les adjointes C'_{n-1} aux courbes C_{n-1}. On a par conséquent

$$2(n-3)C_{n-1} \equiv D_{n-1} + C'_{n-1}.$$

On en déduit

$$2C_{n-1} + D_{n-1} \equiv D_n.$$

En désignant par ρ_{n-1} le genre de la courbe D_{n-1} on en tire

$$\rho_n - \rho_{n-1} = \frac{1}{6}n(n-1)(8n-19).$$

En remarquant que pour $n=2$, on a $\rho_2 - \rho_1 = -1$, on en tire

$$\rho_n = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(2n-5) + 1 = \frac{1}{6}(n-2)(2n^3 - n^2 - 4n - 3).$$

4. Les hypersurfaces d'ordre $2n-4$ passant par F_{n-1} et ne contenant pas comme partie les hypersurfaces d'ordre n contenant F_{n-1} et F_n découpent sur F_n les adjointes C'_n aux courbes C_n.

Par conséquent, les hypersurfaces d'ordre $2n - 5$ passant par F_{n-1} mais non par F_n découpent sur cette dernière surface les courbes canoniques K_n. On obtient l'équation de ces dernières hypersurfaces en faisant précéder la matrice (2) d'une ligne de formes d'ordre $n - 4, f_1, f_2, \ldots, f_n$. Observons cependant que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des multiples de $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \ldots, \varphi_{ni}, (i \leqslant n-1)$ par une forme d'ordre $n - 5$, le déterminant est identiquement nul. Si d'autre part, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des multiples de $\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \ldots, \varphi_{nn}$ ou de $\varphi_{1n+1}, \varphi_{2n+1}, \ldots, \varphi_{nn+1}$ par une forme de degré $n - 5$, on obtient des hypersurfaces contenant F_n. On en conclut que si p_{ng} est le genre géométrique de F_n, on a

$$p_{ng} = n\binom{n}{4} - (n+1)\binom{n-1}{4},$$

c'est-à-dire

$$p_{ng} = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(3n+4).$$

5. On peut construire le système canonique $|K_n|$ d'une autre manière.

Considérons les équations

$$\left\| \varphi_{1i} \quad \varphi_{2i} \cdots \varphi_{n+1i} \quad \varphi_{n+2i} \right\| = 0 \qquad (3)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

où le premier membre est une matrice à $n+1$ lignes et $n+2$ colonnes, les n premières colonnes reproduisent les n lignes de la matrice (1). Ces équations représentent une surface F_{n+1} d'ordre $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Appelons Δ'_i le déterminant tiré de la matrice (3) en supprimant la *i-ième* colonne. Les hypersurfaces d'ordre $n+1$, $\Delta'_{n+1} = 0$, $\Delta'_{n+2} = 0$ ont en commun les surfaces F_{n+1} et F_n ; ces deux surfaces ont en commun une courbe D_{n+1} d'ordre $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Les hypersurfaces d'ordre $2n - 2$ passant par F_{n+1} mais non par F_n découpent sur cette dernière surface les adjointes C'_n aux courbes C_n, par conséquent les hypersurfaces d'ordre $2n - 3$ découpent sur F_n les courbes canoniques K_n.

On a donc

$$(2n - 3)\, C_n \equiv D_{n+1} + K_n.$$

On en déduit

$$D_{n+1} \equiv 2C_n + D_n.$$

Le calcul de la valeur de p_{ng} peut se faire d'une manière analogue au calcul fait plus haut. On trouve ainsi

$$p_{ng} = n\binom{n}{4} - (n + 1)\binom{n-1}{4},$$

c'est-à-dire l'expansion trouvée plus haut.

6. La relation fonctionnelle

$$(2n - 5)C_n \equiv D_n + K_n$$

montre que le système $|(2n - 5)C_n|$ est l'adjoint à la courbe D_n. Par conséquent les hypersurfaces d'ordre $2n - 5$ découpent sur la courbe D_n la série canonique d'ordre $2\rho_n - 2$ et de dimension $\rho_n - 1$. Il en résulte que les hypersurfaces d'ordre $2n - 5$ linéairement indépendantes qui contiennent D_n sont au nombre de

$$\binom{2n-1}{4} - s_n = \frac{1}{6}n(n - 2)(n - 3)(2n - 5).$$

Parmi ces hypersurfaces, il y en a $2\binom{n-1}{4}$ qui contiennent F_n et F_{n-1}. Il en reste

$$\frac{1}{12}(n - 2)(n - 3)(3n^2 - 5n - 4) = p_{ng} - p_{n-1g}.$$

On en conclut que les hypersurfaces d'ordre $2n - 5$ passant par D_n mais non à la fois par F_{n+1} et F_n passent nécessairement par une de ces surfaces.

7. La dimension du système adjoint $|C'_n|$ se calcule d'une manière analogue à celle du système canonique $|K_n|$.

Les courbes C'_n sont découpées sur F_n par les hypersurfaces d'ordre $2n - 4$ passant par F_{n-1}. On trouve que le nombre des courbes C'_n linéairement indépendantes est

$$n\binom{n+1}{4} - (n + 1)\binom{n}{4} = \frac{1}{8}n(n - 1)(n - 2)(n + 1).$$

Or, on a précisément

$$\pi_n = p_{ng} = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n+1),$$

donc le système adjoint $|C'_n|$ découpe sur une courbe C_n la série canonique complète. La surface F_n est donc régulière : $p_{na} = p_{ng}$.

8. Considérons les hypersurfaces d'ordre $n-1$ passant par F_{n+1} et dont l'équation s'obtient en faisant précéder la matrice (2) d'une ligne de constantes. Elles coupent la surface F_n suivant la courbe D_n et suivant des courbes G_n d'ordre $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ formant un système $|G_n|$ de dimension $n-1$. On a

$$(n-1)C_n = D_n + G_n.$$

Considérons d'autre part les hypersurfaces d'ordre $n+1$ passant par F_{n+1} mais non par F_n. Elles découpent sur cette dernière surface, en dehors de D_{n+1}, des courbes $\overline{G}_n$. On a

$$(n+1)C_n = D_{n+1} + \overline{G}_n = D_n + 2C_n + \overline{G}_n.$$

On en conclut que les courbes $\overline{G}_n$ coïncident avec les courbes G_n et que l'on a

$$(n+1)C_n = D_{n+1} + G_n.$$

9. Supposons que les fonctions φ_{ik} soient linéaires et homogènes par rapport aux coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ d'un espace S_{n+1} à $n+1$ dimensions. Les équations

$$\rho x'_i = \Delta'_i,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

déterminent une transformation birationnelle T entre l'espace S_{n+1} et un espace S'_{n+1} de coordonnées $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n+1}$.

Aux hyperplans de S'_{n+1}, T fait correspondre des hypersurfaces V_n^{n+1} passant par la variété Ω représentée par les équations (3). Aux hyperplans de S_{n+1} T^{-1} fait correspondre des hypersurfaces d'ordre $n+1$ passant par une variété Ω' analogue à Ω.

A l'espace linéaire S'_{n-1} d'équations $x'_n = x'_{n+1} = 0$, T fait correspondre une variété V_{n-1} représentée par les équations (1).

Cette variété V_{n-1} coupe la variété Ω suivant une variété Ω_{n-2} à $n-2$ dimensions, d'ordre $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Aux points de la variété Ω correspondent dans S'_{n+1} des droites engendrant la jacobienne J' du système des hypersurfaces d'ordre $n+1$ passant par Ω'. La Jacobienne J' est une hypersurface d'ordre $n(n+2)$ passant $n+1$ fois par Ω'

A la variété Ω_{n-2} correspond point par point la variété (J', S'_{n-1}) section de la jacobienne J' par l'espace S'_{n-1}.

A un espace S'_{n-2} de S'_{n-1} correspond une variété V_{n-2} qui coupe Ω suivant une variété Ω_{n-3} appartenant à Ω_{n-2}. L'ordre de cette variété est égal à celui de la variété intersection de (J', S'_{n-1}) par une variété V'_n homologue d'un hyperplan de S_{n+1} en dehors de Ω', c'est-à-dire

$$\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2).$$

10. Coupons les variétés précédentes par l'espace S_4 à quatre dimensions $x_5 = x_6 = \ldots = x_{n+1} = 0$. La section de la variété Ω par S_4 est la surface F_{n+1}, celle de la variété V_{n-1} est la surface F_n, celle de la variété Ω_{n-2} est la courbe D_{n-1} et enfin celle de la variété Ω_{n-3} est le groupe de points communs à la courbe D_{n+1} et à une courbe G_n. On en conclut que la courbe D_{n+1} est rencontrée par les courbes G_n en $\frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)$ points.

En représentant par $[X, Y]$ le nombre de points communs à deux courbes X, Y tracées sur la surface F_n, on a donc

$$[D_{n+1}, G_n] = \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2).$$

On en déduit que le degré de $|G_n|$ est

$$[G_n, G_n] = \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

et que les courbes G_n rencontrent la courbe D_n en

$$[D_n, G_n] = \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n-2).$$

Des relations fonctionnelles établies plus haut entre les courbes C_n, G_n, D_n, K_n, on déduit

$$K_n = (n - 4)C_n + G_n.$$

On en déduit le degré de $|K_n|$, c'est-à-dire le genre linéaire de F_n ; on a

$$p_n^{(1)} = \frac{1}{24}\, n(n+1)(21n^2 - 139n + 226) + 1$$

11. On peut obtenir une transformée birationnelle de F_n dont les sections hyperplanes sont les courbes G_n de la manière suivante :

Ecrire que la matrice (1) est nulle revient à écrire qu'il existe n quantité $y_1, y_1, \ldots, y_n$ telles que l'on ait simultanément

$$y_1\varphi_{1i} + y_2\varphi_{2i} + \ldots + y_n\varphi_{ni} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + 1)$$

Ecrivons cette relation sous la forme

$$x_0\psi_{i0} + x_1\psi_{i1} + \ldots + x_n\psi_{in} = 0.$$

où les ψ sont des formes linéaires en y.

En écrivant que ces équations sont compatibles, on obtient les équations

$$\| \psi_{i0} \quad \psi_{i1} \ldots \psi_{in} \| = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + 1)$$

dont le premier membre est une matrice à $n + 1$ lignes et cinq colonnes. Elles représentent dans l'espace S_{n-1} des y une surface d'ordre $\frac{1}{24}(n - 2)(n - 1)n(n + 1$ birationnellement identique à F_n et dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes G_n.

Pour n = 4, le système précédent se réduit à une seule équation représentant dans S_3 une surface du cinquième ordre dont les sections planes correspondent aux courbes canoniques, car $K_4 = G_4$.

Liége, le 28 mai 1965.
