Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de surfaces appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan. Impossibilité d'une surface ayant une seule courbe canonique d'ordre huit et de genre cinq tracée sur cette variété.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de surfaces appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan. Impossibilité d'une surface ayant une seule courbe canonique d'ordre huit et de genre cinq tracée sur cette variété.

Dans différentes notes récentes, nous nous sommes occupé des surfaces d'ordre seize d'un espace à cinq dimensions possédant une seule courbe canonique d'ordre huit et de genre cinq [1]. Nous supposions que celle-ci était, dans un hyperplan, l'intersection complète de trois hyperquadriques. On sait qu'il existe un autre modèle d'une courbe d'ordre huit et de genre cinq normale dans un espace à quatre dimensions : c'est l'intersection d'une surface cubique réglée et d'une hypersurface cubique contenant une génératrice de la réglée. Il importait de voir s'il peut exister une surface d'ordre seize d'un espace à cinq dimensions touchant un hyperplan le long d'une courbe de ce second type, courbe qui serait la courbe canonique unique de la surface. La réponse est négative, ce que nous établissons dans cette note. Nous signalons l'existence sur la variété de surfaces qui nous paraissent présenter quelque intérêt.

---

(1) *Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1959, pp. 441-446 ; 1962, pp. 785-791). *Une surface déduite de la surface de Steiner* (Idem., 1965, pp. 137-142).

1. Rapportons projectivement les quadriques

$$x_3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + x_4(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) = 0$$

passant par une droite a ($x_3 = x_4 = 0$) et par un point A (0, 0, 0, 1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions en posant

$$\frac{X_{13}}{x_1 x_3} = \frac{X_{23}}{x_2 x_3} = \frac{X_{33}}{x_3^2} = \frac{X_{14}}{x_1 x_4} = \frac{X_{24}}{x_2 x_4} = \frac{X_{34}}{x_3 x_4}.$$

Aux points de l'espace correspondent les points de la variété cubique V_3^3 d'équations

$$\begin{Vmatrix} X_{13} & X_{23} & X_{33} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette variété contient ∞^1 plans donnés par

$$\frac{X_{13}}{X_{14}} = \frac{X_{23}}{X_{24}} = \frac{X_{33}}{X_{34}} = \lambda \tag{1}$$

et une congruence ∞^2 de droites données par

$$\frac{X_{13}}{\mu_1} = \frac{X_{23}}{\mu_2} = \frac{X_{33}}{\mu_3}, \quad \frac{X_{14}}{\mu_1} = \frac{X_{24}}{\mu_2} = \frac{X_{34}}{\mu_3}. \tag{2}$$

Désignons par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}.

On passe de la variété V_3^3, à l'espace (x) en projetant cette variété de la droite $a' = 0_{14}\, O_{24}$. Aux plans (1) correspondent les plans passant par la droite a et aux droites (2) les droites passant par le point A. Aux points de la droite a' correspondent les droites passant par A et situées dans le plan Aa.

La variété V_3^3 est la variété de Segre représentant les couples de points (x_3, x_4) d'une droite et (x_1, x_2, x_3) d'un plan.

2. A la section F de la variété V_3^3 par une hypersurface V_4^n d'ordre n correspond dans l'espace (x) une surface F' d'ordre $2n$ passant n fois par la droite a et n fois par le point A. La surface F' coupe le plan $x_3 = 0$ suivant n droites passant par A et qui correspondent aux points d'intersection de l'hypersurface V_4^n avec la droite a'. Ce sont des droites exceptionnelles de F'.

Supposons que l'hypersurface V_4^n contienne le plan $\sigma(X_{14} = X_{24} = X_{34} = 0)$. Son équation peut s'écrire sous la forme

$$X_{14}f_1 + X_{24}f_2 \quad X_{34}f_3 = 0,$$

les f étant des formes algébriques de degré $n - 1$ en $X_{13}, X_{23}, \ldots, X_{34}$. L'équation de F' s'écrit alors

$$x_1f'_1 + x_2f'_2 + x_2f'_3 = 0,$$

les f' étant des formes de degré $2n - 2$ en x_1, x_2, x_3, x_4. La surface F' est donc de degré $2n - 1$ et passe $n - 1$ fois par la droite a et n fois par le point A.

Supposons maintenant que l'hypersurface V_4^n contienne la droite a'. Son équation peut s'écrire

$$X_{13}f_1 + X_{23}f_2 + X_{33}f_3 + X_{34}f_4 = 0,$$

les f ayant une signification analogue aux précédentes. La surface F' a pour équation

$$x_1f'_1 + x_2f'_2 + x_3f'_3 + x_4f'_4 = 0.$$

Elle est d'ordre $2n - 1$ et passe $n - 1$ fois par a et $n - 1$ fois par A.

Supposons enfin que l'hypersurface V_4^n contienne la quadrique

$$X_{13}X_{24} - X_{23}X_{14} = 0, \quad X_{33} = 0, \quad X_{34} = 0.$$

Son équation devient

$$X_{33}f_1 + X_{34}f_2 = 0$$

et celle de la surface F'

$$X_3f'_1 + x_4f'_2 = 0.$$

C'est une surface d'ordre $2n - 1$ passant n fois par a et $n - 1$ fois par A.

3. Considérons la surface F intersection de la variété V_3^3 par une hypersurface cubique V_4^3 contenant le plan σ. Il lui correspond une surface F' d'ordre cinq passant deux fois par a et trois fois par A.

L'adjointe à la surface F' est unique et se réduit au plan Aa.

Or, celui-ci rencontre la surface F' suivant trois droites qui correspondent aux points de rencontre de la droite a' avec l'hypersurface V_4^3 et sont donc des droites exceptionnelles de F'. On en conclut que la surface F' possède une courbe canonique d'ordre zéro.

A la section de F par un hyperplan correspond l'intersection de F' et d'une quadrique passant simplement par a et par A. Cette intersection est une courbe d'ordre huit passant trois fois par A et rencontrant la droite a en cinq points. Lorsque la quadrique varie, cette courbe engendre un système linéaire de dimension cinq. Or, la surface F' ayant une courbe canonique d'ordre zéro et étant certainement régulière, un système linéaire tracé sur F' est son propre adjoint. On en conclut que les quadriques passant par a et A découpent sur F' des courbes d'ordre huit et de genre cinq.

La surface F est d'ordre huit, elle appartient aux ∞^2 hyperquadriques passant par V_3^3, ses sections hyperplanes sont de genre cinq et sa courbe canonique est d'ordre zéro. Elle est donc de genres $p_a = P_4 = 1$. Cette surface a déjà été rencontrée par G. Fano et par M. P. Du Val. Elle n'est pas un cas particulier de la surface de genres $p_a = P_4 = 1$ intersection complète de trois hyperquadriques de S_5 (1).

4. Désignons par F_k une forme algébrique en $X_{13}, X_{23}, \ldots, X_{34}$ de degré k et considérons la surface F d'équation

$$F_1F_5 + (F_3)^2 = 0,$$

où nous supposons que la surface $F_3 = 0$ contient le plan σ et que la surface $F_5 = 0$ contient le plan σ compté deux fois. La surface F contient le plan σ compté deux fois et est donc d'ordre seize.

L'hyperplan $F_1 = 0$ touche la surface le long de la courbe C, d'ordre huit et de genre cinq, ayant pour équations

$$F_1 = 0, \quad F_3 = 0.$$

(1) Signalons en passant que si dans un espace à six dimensions on considère le cône V_4^3 projetant la variété V_3^3 d'un point, une hypersurface V_5^3 contenant un espace à trois dimensions de ce cône et une hyperquadrique, l'intersection de ces trois variétés est une surface projectivement canonique.

Nous nous proposons de rechercher dans quelles conditions la courbe C est une courbe canonique (complète) de la surface.

A l'hyperplan $F_1 = 0$ correspond une quadrique passant par a et par A, que nous désignerons par $F'_2 = 0$.

A l'hypersurface $F_5 = 0$ correspond une surface d'ordre huit passant trois fois par la droite a et cinq fois par le point A. Nous la désignerons par $F'_8 = 0$.

A l'hypersurface $F_3 = 0$ correspond une surface d'ordre cinq passant deux fois par a et trois fois par A. Elle sera désignée par $F'_5 = 0$.

A la surface F correspond une surface F' d'équation

$$F'_2 F'_8 + (F'_5)^2 = 0.$$

Elle est d'ordre dix, passe quatre fois par a et six fois par A. Le plan Aa la coupe suivant dix droites exceptionnelles.

Les adjointes à la surface F' sont des surfaces d'ordre six passant trois fois par la droite a et quatre fois par le point A. Elles comprennent donc comme partie fixe le plan Aa et sont complétées par des surfaces φ_5 du cinquième ordre passant deux fois par a et trois fois par A. Parmi ces surfaces se trouve donc la surface $F_5 = 0$. On en conclut que la courbe C', homologue de la courbe C, fait partie d'une courbe canonique de la surface.

Les courbes canoniques de F' sont d'ordre 42, ont en A la multiplicité 18 et s'appuient en 24 points sur la droite a.

Les surfaces $F'_5 = 0$ et $F'_8 = 0$ se rencontrent suivant une courbe d'ordre 34 ayant la multiplicité 15 en A et s'appuyant en 19 points sur la droite a. Observons que le long de cette courbe, la surface $F'_8 = 0$ touche la surface $F'_5 = 0$. De plus, cette courbe et la courbe C' d'ordre huit forment un courbe canonique de F'.

Pour que la courbe C' soit une courbe canonique complète, il faut que la surface F'_5 coupe la surface F'_8 suivant une courbe double D. La courbe D devrait être d'ordre 17 mais comme la courbe commune aux surfaces F'_5, F'_8 s'appuie en 19 points sur a et a la multiplicité 15 en A, cette courbe ne peut devenir une courbe D comptée deux fois.

D'ailleurs, si l'on observe que les surfaces F'_8, F'_5 ont des équations de la forme

$$x_4^3\alpha_0 + x_4^2x_3\alpha_1 + x_4x_3^2\alpha_2 + x_3^3\alpha_3 = 0,$$
$$x_4^2\beta_0 + x_4x_3\beta_1 + x_3^2\beta_2 = 0,$$

où les α sont des formes algébriques du cinquième degré et les β des formes du troisième degré en x_1, x_2, x_3, la projection de la courbe commune à ces deux surfaces du point A sur le plan $x_4 = 0$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une courbe d'ordre 19 qui ne peut se réduire à une courbe comptée deux fois.

Observons que si la courbe D existait, les sections planes de la surface F'_8 seraient elliptiques et que l'adjointe d'ordre cinq à cette surface serait unique.

5. On peut se demander si l'on ne pourrait arriver au résultat en supposant que la surface $F_5 = 0$ est réductible.

Supposons par exemple que l'hypersurface $F_5 = 0$ soit formée de deux hyperquadriques $F_2 = 0$, $G_2 = 0$, passant par le plan σ et d'un hyperplan $G_1 = 0$. L'équation de F est donc

$$F_1F_2G_2G_1 + (F_3)^2 = 0.$$

Observons que si la courbe C est courbe canonique de F, il en sera de même de la courbe $G_1 = 0$, $F_3 = 0$ par raison de symétrie.

Aux sections de V_3^3 par $F_2 = 0$, $G_2 = 0$, $G_1 = 0$ correspondent respectivement :

Une surface F'_3 passant simplement par a et deux fois par A,
Une surface G'_3 ayant les mêmes propriétés,
Une quadrique G'_2 passant par a et A.

Les adjointes à F' doivent passer par

la courbe (F'_3, G'_3) commune aux surfaces F'_3, G'_3, qui est d'ordre huit, passe quatre fois par A et rencontre a en quatre points,
la courbe (F'_3, G'_2) commune aux surfaces F'_3 et G'_2, qui est d'ordre cinq, passe deux fois par A et coupe a en trois points,
la courbe (G'_3, G'_2) commune aux surfaces G'_3, G'_2 qui est analogue à la précédente.

En projetant de A ces courbes sur le plan $x_4 = 0$, on voit que la première est de genre trois et que les deux autres sont elliptiques.

Les trois courbes ont en commun huit points.

Les surfaces $\varphi_5 = 0$ d'ordre cinq, passant deux fois par a et trois fois par A, découpent sur la courbe (F'_3, G'_3) une série d'ordre 20 et de dimension 17. Comme les surfaces φ_5 sont en nombre ∞^{29}, il y en a ∞^{11} qui contiennent la courbe (F'_3, G'_3). Elles découpent sur la courbe (F'_3, G'_2) une série linéaire d'ordre cinq et de dimension quatre ; il y a donc ∞^6 surfaces φ_5 contenant cette courbe. Elles découpent sur la courbe (G'_3, G'_2) une série linéaire d'ordre cinq et de dimension quatre. Il y en a donc ∞^1 contenant cette courbe. On en conclut que les surfaces adjointes à la surface F' sont en nombre ∞^1. Il est aisé de voir que ces surfaces ont pour équation

$$G'_2(\lambda F'_3 + \mu G'_3) = 0.$$

Mais alors, F'_5 devrait avoir cette forme et la surface F serait réductible. Donc la dégénérescence de $F_5 = 0$ envisagée doit être rejettée.

6. On pourrait également supposer que l'hypersurface F_5 se compose d'une hyperquadrique $F_2 = 0$, d'une hyperquadrique $G_2 = 0$ passant par σ et d'un hyperplan $G_1 = 0$ passant également par σ.

Aux intersections de V_3^3 par ces hypersurfaces correspondent respectivement

Une surface F'_4 du quatrième ordre passant deux fois par a et deux fois par A,

Une surface G_3' du troisième ordre passant une fois par a et deux fois par A,
Un plan G_1' passant par A mais non par a.

Les surfaces adjointes à F′, d'ordre cinq, devraient passer par les sections du plan G_1' avec les surfaces F_4', G_3' et le plan G_1' serait donc une composante fixe de ces adjointes. Mais alors, la surface F_3' devrait aussi contenir ce plan comme partie et la surface F serait réductible.

7. Considérons maintenant la surface F intersection complète de la variété V_3^3 et d'une hypersurface cubique $F_3 = 0$. Il lui correspond une surface F′ d'ordre six, passant trois fois par a et A.

Les adjointes à F′ sont des quadriques passant deux fois par a et une fois par A. Elles comprennent comme partie fixe le plan Aa, qui coupe F′ suivant six droites exceptionnelles. La partie variable des adjointes est donc un plan passant par a. A ces plans correspondent les plans de la variété V_3^3 qui découpent donc sur F les courbes canoniques de cette surface. Ce sont des cubiques elliptiques et la surface F a les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 3$.

Nous avons déjà rencontré cette surface et nous l'avons utilisée pour construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 1$ (¹).

8. Soit F la surface découpée sur la variété V_3^3 par une hypersurface F du quatrième ordre contenant le plan σ. Cette surface est d'ordre onze et il lui correspond une surface F′ d'ordre sept passant trois fois par a et quatre fois par A.

Les adjointes à F′ sont des surfaces cubiques passant deux fois par a et deux fois par A. Elles comprennent comme partie fixe le plan Aa et sont complétées par les quadriques passant une fois par a et A. Or ces quadriques correspondent aux sections

(¹) *Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls et de genre linéaire un* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1934, pp. 184-187).

hyperplanes de F, donc celle-ci est une surface projectivement canonique de S_5.

L'intersection de la variété V_3^3 et d'une hypersurface du quatrième ordre contenant un plan de la variété, est une surface d'ordre onze projectivement canonique.

La surface F a les genres $p_a = p_g = 6$, $p^{(1)} = 12$, $P_2 = 18$.

Supposons que l'hypersurface $F_4 = 0$ contienne le plan σ comme plan double. Il correspond à la surface F une surface F′ d'ordre six passant deux fois par a et quatre fois par A. Les adjointes à F′ sont des quadriques passant par a et ayant un point double en A. Elles comprennent comme partie fixe le plan Aa et sont complétées par les plans passant par A.

On en conclut que sur la surface F, les courbes canoniques sont découpées par les hyperplans passant par σ.

9. On peut sans difficulté obtenir les résultats suivants que nous nous contenterons d'énoncer.

Soit F la surface intersection de la variété V_3^3 avec une hypersurface d'ordre n ayant le plan σ comme plan multiple d'ordre ν (ou passant par ν plans de la variété).

Les courbes canoniques de F sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $n - 3$ ayant le plan σ comme plan multiple d'ordre $\nu - 1$ (ou passant par $\nu - 1$ plans de la variété).

On doit avoir $\nu \leq n - 2$.

Liège, le 30 janvier 1965.