Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces et variétés algébriques appartenant à une variété de Segre

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de surfaces et de variétés algébriques appartenant à la variété de Segre représentant les points d'une droite et d'un espace à trois dimensions.
Cette courte note est consacrée à l'étude de certaines surfaces et variétés algébriques appartenant à la variété de Segre à quatre dimensions, d'ordre quatre, représentant dans un espace linéaire à sept dimensions, les couples de points d'une droite et d'un espace à trois dimensions.
Après avoir rappelé rapidement les propriétés de la variété de Segre en question, nous considérons sur celle-ci une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces dont tous les genres sont égaux à l'unité et une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces projectivement canoniques.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Surfaces et variétés algébriques appartenant à une variété de Segre. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 51, 1965. pp. 8-14;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1965.65155;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1965_num_51_1_65155;

Fichier pdf généré le 22/02/2024

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces et variétés algébriques appartenant à une variété de Segre

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Etude de surfaces et de variétés algébriques appartenant à la variété de Segre représentant les points d'une droite et d'un espace à trois dimensions.

Cette courte note est consacrée à l'étude de certaines surfaces et variétés algébriques appartenant à la variété de Segre à quatre dimensions, d'ordre quatre, représentant dans un espace linéaire à sept dimensions, les couples de points d'une droite et d'un espace à trois dimensions.

Après avoir rappelé rapidement les propriétés de la variété de Segre en question, nous considérons sur celle-ci une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces dont tous les genres sont égaux à l'unité et une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces projectivement canoniques.

1. Soient y_0, y_1 les coordonnées des points d'une droite (y) et z_0, z_1, z_2, z_3 celles des points d'un espace à trois dimensions (z). Posons

$$X_{ik} = y_i z_k, \ (i = 0, 1 ; k = 0, 1, 2, 3).$$

Les équations de la variété de Segre V_4^4 d'ordre quatre, de l'espace S_7, dont les X sont les coordonnées ponctuelles, représentant les couples de points de la droite (y) et de l'espace (z), sont

$$\begin{Vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} & X_{03} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} & X_{13} \end{Vmatrix} = 0.$$

Aux couples de points contenant un point fixe y correspondent les points d'un espace à trois dimensions ζ d'équations

$$y_1X_{00} - y_0X_{10} = 0,\ y_1X_{01} - y_0X_{11} = 0,\ y_1X_{02} - y_0X_{12} = 0,$$
$$y_1X_{03} - y_0X_{13} = 0.$$

Aux couples de points contenant un point fixe z correspondent les points d'une droite η d'équations

$$\frac{X_{00}}{z_0} = \frac{X_{01}}{z_1} = \frac{X_{02}}{z_2} = \frac{X_{03}}{z_3},$$

$$\frac{X_{10}}{z_0} = \frac{X_{11}}{z_1} = \frac{X_{12}}{z_2} = \frac{X_{13}}{z_3}.$$

Les espaces ζ forment un faisceau $|\zeta|$ et les droites η une congruence linéaire ∞^3. Une droite η et un espace ζ se rencontrent en un seul point.

On obtient une représentation point par point de la variété V_4^4 sur un espace linéaire S_4 en projetant la variété d'un plan appartenant à un espace ζ. Cela revient à poser

$$x_0 = y_0 = z_0,\ x_1 = z_1,\ x_2 = z_2,\ x_3 = z_3,\ x_4 = y_1.$$

Dans cette représentation, à une section hyperplane

$$A = \Sigma\, a_{ik}X_{ik} = 0$$

correspond une hyperquadrique

$$\begin{gathered} a_{00}x_0 + x_0(a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{10}x_4) + \\ x_4(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Lorsque l'hyperplan varie, l'hyperquadrique (1) décrit un système linéaire de dimension sept ayant en commun le plan $\alpha(x_0 = x_4 = 0)$ et le point $A(x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0)$.

L'hyperquadrique (1) peut se représenter sur un espace S_3 en la projetant du point A sur cet espace.

En considérant une seconde section hyperplane de V,

$$\Sigma\, \lambda_{ik} X_{ik} = 0$$

et l'hyperquadrique qui lui correspond dans S_4, à la section de l'hyperquadrique (1) par cette hyperquadrique correspond dans S_3 la quadrique

$$\begin{vmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 & \lambda_{00}x_0 + \lambda_{01}x_1 + \lambda_{02}x_2 + \lambda_{03}x_3 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & \lambda_{10}x_0 + \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque les λ varient, cette quadrique décrit un système linéaire de dimension six ayant pour base la droite a d'équations

$$a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 = 0,$$
$$a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Cette quadrique représente la section de la variété V_4^4 par un espace à cinq dimensions.

2. Considérons la variété à trois dimensions Ω section de V_4 par une hypersurface V_6^n de S_7.

A la variété Ω correspond dans S_4 une variété Ω' d'ordre $2n$, passant n fois par le plan α et n fois par le point A. Nous allons déterminer le système adjoint au système des sections hyperplanes de Ω.

Désignons par F une section hyperplane de Ω et par Φ les sections des espaces ζ par l'hypersurface V_6^n.

A une surface F correspond dans S_4 une surface F_1 section de la variété Ω' par une hyperquadrique (1). La surface F est d'ordre $3n$.

A la surface F_1 correspond dans S_3 une surface F_2 d'ordre $2n$ passant n fois par la droite a. Les adjointes F_2' à cette surface F_2 sont des surfaces d'ordre $2n - 4$ passant $n - 1$ fois par la droite a.

Parmi les surfaces F_2' se trouvent des surfaces formées de $n - 3$ quadriques passant par a et de deux plans passant par a. Aux premières correspondent des sections hyperplanes de Ω et aux seconds des surfaces Φ. On a donc

$$F' \equiv (n - 3)F + 2\Phi.$$

Le système canonique de Ω est donc

$$|(n-4)\mathrm{F}+2\Phi|.$$

Observons que l'on a

$$(\mathrm{F}+\Phi)'=\mathrm{F}'+\Phi=(n-3)\mathrm{F}+3\Phi$$

et

$$(\mathrm{F}+\Phi)'=\mathrm{F}+\Phi',$$

d'où

$$|\Phi'|=|(n-4)\mathrm{F}+3\Phi|,$$

ce qui pourrait du reste se déduire de

$$|\Phi'-\Phi|=|(n-4)\mathrm{F}+2\Phi|.$$

3. Supposons maintenant que l'hypersurface V_6^n passe par k espaces ζ et soit Ω_k la section de V_4^4 par cette hypersurface en dehors des espaces ζ. On a donc $\Omega=\Omega_k+k\zeta$.

Appelons G_k les sections hyperplanes de la variété Ω_k. On a

$$\mathrm{F}\equiv\mathrm{G}_k+k\Phi.$$

A la variété Ω_k correspond dans S_4 une variété Ω_k' d'ordre $2n-k$ passant $n-k$ fois par le plan α et n fois par le point A.

Pour $k=n$, la variété Ω_k est un cône de sommet A et pour $k=n-1$, c'est un monoïde de sommet A, passant simplement par le plan α. Cette variété est donc rationnelle.

Supposons $k<n-1$. A la section de Ω_k par un hyperplan A, c'est-à-dire à la section de la variété Ω_k' par l'hyperquadrique (1), correspond dans S_3 une surface G_{k1} d'ordre $2n-k$ passant $n-k$ fois par la droite a. Les adjointes à cette surface sont des surfaces d'ordre $2n-k-4$ passant $n-k-1$ fois par a.

Supposons que parmi les adjointes se trouvent des surfaces formées de x quadriques passant par a et de $2n-k-4$ plans passant par a. On doit avoir

$$x+2n-k-4-2x=n-k-1,$$

d'où $x=n-3$. On en déduit que les adjointes aux surfaces G_k sont découpées par les variétés

$$\mathrm{G}_k'\equiv(n-3)\mathrm{F}+(2-k)\Phi.$$

D'ailleurs, on a

$$(G_k + k\Phi)' = G'_k + k\Phi = (n - 3)F + 2\Phi,$$

d'où l'on déduit la relation précédente et

$$G'_k = (n - 3)G + [(n - 4)k + 2]\,\Phi.$$

Dans l'espace S_3, parmi les $n - 3$ quadriques passant par a, il en est $k - 2$ dégénérées en un plan passant par a et en un plan ne passant pas par a (en général).

On a

$$\Phi' = (n - 4)G_k + [(n - 4)k + 3]\,\Phi.$$

Le système canonique de la variété Ω_k est

$$|\,(n - 4)G_k + [(n - 4)k + 2]\,\Phi\,|.$$

4. Supposons $n = 3$. Les surfaces Φ sont alors des surfaces cubiques donc des surfaces rationnelles.

Si l'hypersurface V_6^3 ne contient aucun espace ζ, le système adjoint au système des sections hyperplanes $|\,F\,|$ est $|\,2\Phi\,|$. Il ne peut donc contenir une section hyperplane et la variété Ω est dépourvue de système canonique.

Quant à une section hyperplane F, c'est une surface d'ordre 12, contenant un faisceau $|\,C\,|$ de cubiques planes elliptiques. Les courbes canoniques de la surface sont formées de couples C et le genre géométrique de la surface est $p_g = 3$. Son genre linéaire est $p^{(1)} = 1$.

Si l'hypersurface V_6^3 contient un espace ζ ($k = 1$), la variété Ω_1 est dépourvue de système canonique et comme on a $|\,G'_1\,| = |\,\Phi\,|$, le système canonique d'une surface G_1 est le faisceau $|\,C\,|$ de cubiques elliptiques. On a $p_g = 2$.

Si l'hypersurface V_6^3 contient deux espaces ζ ($k = 2$), la variété Ω_2 est dépourvue de système canonique et comme on a $G'_k = 0$, une surface G_k possède une courbe canonique d'ordre zéro.

A une surface G_k correspond d'ailleurs dans l'espace S_3 une surface du quatrième ordre passant simplement par la droite a et dont tous les genres sont donc égaux à l'unité.

Supposons que l'hypersurface V_6^3 contienne les espaces ζ donnés par $X_{00} = X_{00} = X_{02} = X_{03} = 0$ et $X_{10} = X_{11} = X_{12} = X_{13} = 0$. Son équation s'écrit

$$\Sigma X_{0i} X_{0k} \varphi_{ik}(X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{13}) = 0, \ (i, k = 0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

où les φ_{ik} sont des formes linéaires.

L'intersection de la variété de Segre V_4^4 et de l'hypersurface (2) est une variété rationnelle dont les sections hyperplanes sont des surfaces dont tous les genres sont égaux à l'unité.

Observons que le nombre de termes de l'équation (2) peut être réduit en tenant compte des relations $X_{0i} X_{1k} = X_{0k} X_{1i}$, $(i \neq k)$.

4. Supposons $n = 4$. Les surfaces Φ sont alors des surfaces du quatrième ordre dont tous les genres sont égaux à un.

Si l'hypersurface V_6^4 ne contient aucun espace ζ, on a

$$F' = F + 2\Phi$$

et la variété Ω possède un système canonique $|2\Phi|$ et a le genre géométrique $P_g = 3$.

Une section hyperplane F contient un faisceau $|C|$ de quartiques de genre trois et ses courbes canoniques sont formées de couples de courbes C. Son genre géométrique est $p_g = 3$ et son genre linéaire $p^{(1)} = 7$.

Si l'hypersurface V_6^4 contient un espace ζ, on a

$$F = G_1 + \Phi, \quad G_1' = G_1 + 2\Phi$$

et la variété Ω_1 possède comme système canonique $|2\Phi|$ et a le genre géométrique $P_g = 3$.

Une section hyperplane G_1 contient également un faisceau de quartiques C de genre trois. Ses courbes canoniques sont formées de deux courbes de ce faisceau et on a $p_g = 3$ et $p^{(1)} = 5$.

Si l'hypersurface V_6^4 contient deux espaces ζ, on a

$$F = G_2 + 2\Phi, \quad G_2' = F = G_2 + 2\Phi,$$

Le système canonique de la variété Ω_2 est encore $|2\Phi|$ et on a $P_g = 3$.

Le système canonique d'une surface G_2 est découpé par les surfaces F, c'est-à-dire par les hyperplans. La surface G_2 est donc une surface projectivement canonique, de genre $p_g = 7$. On peut donc écrire que

Les sections hyperplanes de l'intersection d'une variété de Segre V_4 *par l'hypersurface*

$$\Sigma X_{0i} X_{1k} \varphi_{ik}(X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{13}) = 0$$

où les φ_{ik} *sont des formes quadratiques, sont des surfaces projectivement canoniques de genres* $p_g = 7$ *et* $p^{(1)} = 15$.

Lorsque l'hypersurface V_6^4 contient trois espaces ζ, la variété Ω_3 est rationnelle. A une section hyperplane G_3 correspond dans S_3 une surface du cinquième ordre passant simplement par la droite a et dont les adjointes sont les plans de l'espace. A ceux-ci correspondent les sections de V_4^4 par les hyperplans contenant un espace ζ. On a donc

$$G' + \Phi = G.$$

Enfin, lorsque l'hypersurface V_6^4 contient quatre espaces ζ, la variété Ω_4' est un cône et à une section hyperplane G_4 correspond dans S_3 une surface du quatrième ordre ne contenant pas la droite a. Les sections hyperplanes G de la variété Ω_4 sont des surfaces dont tous les genres sont égaux à un, mais ce ne sont pas des surfaces normales.

Liège, le 28 décembre 1964.