Bulletin de la Classe des sciences

Procédés de construction de surfaces ayant une seule courbe canonique

Lucien Godeaux

Résumé
Constructions de surfaces doubles ayant comme support une surface d'Enriques, possédant une seule courbe canonique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Procédés de construction de surfaces ayant une seule courbe canonique

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Constructions de surfaces doubles ayant comme support une surface d'Enriques, possédant une seule courbe canonique.

Dans une note récente [1] nous avons construit une surface de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 5$ en considérant une surface d'Enriques double ayant une courbe de diramation de genre 4 et trois points de diramation isolés. Le procédé de construction de surfaces régulières ayant une seule courbe canonique peut être étendu de deux manières comme nous l'établirons dans cette note.

Soit Φ une surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Désignons par Γ ses sections planes et par Γ' les courbes découpées par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre. On sait que les systèmes linéaires $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ sont adjoints l'un à l'autre et que l'on a $2\Gamma \equiv 2\Gamma'$.

Considérons les systèmes

$$|2n\Gamma|, \quad |(2n-1)\Gamma + \Gamma'|.$$

[1] *Construction d'une surface ayant une seule courbe canonique de genre quatre.* (seconde note). (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1965, pp. 956-963).

Ils sont adjoints l'un à l'autre. Les courbes du premier sont découpées par les surfaces d'ordre $6n$ passant $2n$ fois par les arêtes du tétraèdre et ne contenant pas comme partie la surface Φ, les courbes du second sont découpées par les surfaces d'ordre $6n - 2$ passant $2n - 1$ fois par les arêtes du tétraèdre et ne contenant pas Φ comme partie. Si l'on désigne par φ_{2n} l'équation d'une surface du premier système et par φ_{2n-2} celle d'une surface du second système, en adjoignant à l'équation de la surface Φ l'équation

$$x^2\varphi_{2n-2} + \varphi_{2n} = 0,$$

on obtient une surface régulière possédant une seule courbe canonique.

On peut de même partir des systèmes linéaires

$$|(2n - 1)\Gamma|, \qquad |2(n - 1)\Gamma + \Gamma'|.$$

La démonstration est la même quel que soit n et nous la développerons dans le cas $n = 1$. Nous parvenons ainsi au théorème suivant :

Les équations

$$f_2(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,$$

$$x^2\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) + \varphi_1'(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) = 0,$$

où f_2, φ_2, φ_1, φ_1' *représentent des formes algébriques de leurs arguments dont le degré est indiqué par l'indice, représentent une surface de genres* $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 13$, $P_2 = 14$. *La courbe canonique se compose de deux courbes de genre quatre ayant six points communs et d'une courbe d'ordre zéro.*

Nous formerons les équations de la surface bicanonique normale.

Nous exposerons ensuite brièvement les résultats obtenus dans le cas où n est quelconque. Enfin, nous indiquerons les résultats dans la généralisation du procédé utilisé dans notre note citée au début, le raisonnement étant le même que dans le cas étudié alors.

1. Soit Φ une surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre $0_1 0_2 0_a 0_4$, d'équation

$$f_2(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0, \quad (1)$$

f_2 et φ_2 étant des formes du second degré de leurs arguments.

Nous désignerons par Γ les sections planes de Φ et par Γ' les courbes du sixième ordre découpées sur Φ par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $0_1 0_2 0_a 0_4$. On sait que les systèmes $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ sont adjoints l'un à l'autre ; ils sont de genre quatre et l'on a $|2\Gamma| = |2\Gamma'|$. La surface Φ a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 1$.

Désignons par φ_1, φ_1' des formes linéaires à quatre variables et considérons, dans S_4, la surface F représentée par l'équation (1) et l'équation

$$x_0^2\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) + \varphi_1'(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) = 0.$$

Soient Γ_0, Γ_0 les courbes découpées sur Φ par les surfaces

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1' = 0.$$

Nous désignerons par T la transformation birationnelle involutive de F en soi qui fait correspondre le point $-x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ au point x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, et par I l'involution engendrée par T et dont Φ est l'image.

Si C_0 et $\bar{C}_0$ sont les courbes qui correspondent sur F à Γ_0 et Γ_0', l'involution I a comme courbe unie $C_0 + \bar{C}_0$.

Soient C, $\bar{C}$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ, Γ'. Les systèmes $|C|$, $|\bar{C}|$ ont le genre 13 et le degré 12. De plus, on a

$$C \equiv 2C_0 \qquad \bar{C} \equiv 2\bar{C}_0$$

et en outre

$$|2C| = |2\bar{C}|.$$

2. Considérons une courbe Γ et son homologue C sur F. A un groupe canonique de Γ correspond sur C un groupe de points qui joint aux points de rencontre de C avec C_0 et $\bar{C}_0$, donne un groupe canonique de C. Les groupes canoniques de Γ étant découpés par les courbes Γ', l'adjoint à $|C|$ est

$$|C'| = |\bar{C} + C_0 + \bar{C}_0|.$$

De même, l'adjoint à $|\bar{C}|$ est

$$|\bar{C}'| = |C + C_0 + \bar{C}_0|.$$

On a

$$|C''| = |\bar{C}' + C_0 + \bar{C}_0| = |C + 2(C_0 + \bar{C}_0)|$$

et par conséquent le système bicanonique de F est

$$|C_2| = |C'' - C| = |2(C_0 + \bar{C}_0)| = |C + \bar{C}|.$$

Le système bicanonique a le degré

$$4(p^{(1)} - 1) = 48,$$

donc le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 13$.

Le système canonique, s'il existe, est

$$|C_1| = |C' - C| = |\bar{C} - C + C_0 + \bar{C}_0|,$$

$$|C_1| = |\bar{C}' - \bar{C}| = |C - \bar{C} + C_0 + \bar{C}_0|.$$

Les deux systèmes sont équivalents, car on a

$$|\bar{C} - C + C_0 + \bar{C}_0 + 2C - 2\bar{C}| = |C - \bar{C} + C_0 + \bar{C}_0|.$$

L'adjoint à C_0 est donné par

$$C_0' = 2C_0 + \bar{C}_0 + C + \bar{C} = \bar{C}_0 + \bar{C}.$$

On a de même

$$\bar{C}_0' = C_0 + C.$$

3. Le système tricanonique est donné par

$$|C_3| = |C + \bar{C}'| = |2C + C_0 + \bar{C}_0|.$$

Il a le genre $6(p^{(1)} - 1) + 1 = 73$ et le degré $9\,(p^{(1)} - 1) = 108$. Soit $n = P_3 - 1$ sa dimension.

Le système $|C_3|$ contient deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un est formé de la courbe fixe $C_0 + \bar{C}_0$ et des courbes variables $2C$. Le second est privé de partie fixe. Désignons -le par H.

Observons que les courbes $\Gamma_0 + \Gamma_0'$ et $2\Gamma + \Gamma_0 + \Gamma_0'$ ont en commun 48 points, par conséquent les courbes de H rencontrent la courbe $C_0 + \bar{C}_0$ en 48 points et par suite T détermine sur une courbe de H une involution ayant 48 points unis. L'image de cette involution sur Φ est une courbe de genre 25 appartenant sur Φ à un système de dimension 24. Telle est donc la dimension de H. Comme le système $|2C|$ a la dimension 12, on a $n = 37$ et

$$P_3 - 1 = p_a + 36 = 37.$$

Le genre arithmétique de F est donc $p_a = 1$.

Le système bicanonique

$$|C_2| = |C + \bar{C}|$$

a la dimension

$$P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1 = 13$$

d'où $P_2 = 14$.

Les courbes bicanoniques ont le genre 37 et le système tricanonique a la dimension 37, donc ses courbes découpent sur une courbe C_2 la série canonique g_{72}^{36} complète et la surface F est régulière. Son genre géométrique est $p_g = 1$.

La courbe canonique

$$C_1 \equiv C - \bar{C} + C_0 + \bar{C}_0 \equiv \bar{C} - C + C_0 + \bar{C}_0$$

est donc isolée. Comme on l'a vu, elle a le genre $p^{(1)} = 13$.

On voit donc que pour obtenir la courbe canonique, on doit ajouter à l'ensemble des courbes de diramation la courbe d'ordre zéro $C - \bar{C}$.

5. Nous nous proposons maintenant de former les équations d'un modèle bicanonique normal de la surface F. Dans ce but, nous commencerons par former les équations d'une surface Φ_1, birationnellement identique à Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma + \Gamma'$.

Les courbes $\Gamma + \Gamma'$ sont découpées sur Φ par les surfaces Ψ du quatrième ordre circonscrites au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. L'équation de ces surfaces est

$$\Sigma\lambda_{ihk}x_i^2x_hx_k + \lambda x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

où i, h, k sont trois distincts des nombres 1, 2, 3, 4.

Si i, j, h, k est une permutation des nombres 1, 2, 3, 4, nous poserons

$$X_{ij} = \rho x_i^2 x_h x_k, \quad X = \rho x_1 x_2 x_3 x_4.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{X}{x_1} = \frac{X_{21}}{x_2} = \frac{X_{31}}{x_3} = \frac{X_{41}}{x_1} = \rho x_2 x_3 x_4,\\
&\frac{X_{12}}{x_1} = \frac{X}{x_2} = \frac{X_{32}}{x_3} = \frac{X_{42}}{x_4} = \rho x_1 x_3 x_4,\\
&\frac{X_{13}}{x_1} = \frac{X_{23}}{x_2} = \frac{X}{x_3} = \frac{X_{43}}{x_4} = \rho x_1 x_2 x_4,\\
&\frac{X_{14}}{x_1} = \frac{X_{24}}{x_2} = \frac{X_{34}}{x_3} = \frac{X}{x_4} = \rho x_1 x_2 x_3,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

et

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{X}{x_2x_3x_4} = \frac{X_{12}}{x_3x_4x_1} = \frac{X_{13}}{x_4x_1x_2} = \frac{X_{14}}{x_1x_2x_3} = \rho x_1,\\
&\frac{X_{21}}{x_2x_3x_4} = \frac{X}{x_3x_4x_1} = \frac{X_{23}}{x_4x_1x_2} = \frac{X_{24}}{x_1x_2x_3} = \rho x_2,\\
&\frac{X_{31}}{x_2x_3x_4} = \frac{X_{32}}{x_3x_4x_1} = \frac{X}{x_4x_1x_2} = \frac{X_{34}}{x_1x_2x_3} = \rho x_3,\\
&\frac{X_{41}}{x_2x_3x_4} = \frac{X_{42}}{x_3x_4x_1} = \frac{X_{43}}{x_4x_1x_2} = \frac{X}{x_1x_2x_3} = \rho x_4.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

On en conclut que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
X & X_{21} & X_{31} & X_{41}\\
X_{12} & X & X_{32} & X_{42}\\
X_{13} & X_{23} & X & X_{43}\\
X_{14} & X_{24} & X_{34} & X
\end{vmatrix}$$

est de caractéristique un. Les équations ainsi obtenues représentent une variété à trois dimensions V_3 qui correspond point par point à l'espace à trois dimensions contenant Φ.

Une surface Ψ est de genre $p_a = P_4 = 1$. Elles sont en nombre ∞^{12} et sur une de ces surfaces les ∞^{11} autres découpent des courbes de genre 11, donc de degré 20. Le degré du système $|\Psi|$ est donc égal à 20 et la variété que nous venons d'obtenir est une variété V_3^{20} d'ordre 20.

Notons en passant bien que cela ne soit pas nécessaire que les équations de la variété de Segre V_6^{20} représentant les couples de points de deux espaces (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4) à trois dimensions s'obtiennent, en posant $X_{ik} = y_i z_k$, que le déterminant

$$|X_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique un. Cette variété appartient à un espace à 15 dimensions et sa section par l'espace à 12 dimensions

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{44} \ (= X)$$

est la variété V_3^{20}.

6. En utilisant la première ligne des équations (1), on obtient

$$\rho^2(x_1x_2x_3)^2\varphi_2(x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4) = \varphi_2(X, X_{21}, X_{31}, X_{41})$$

et en utilisant la seconde ligne des équations (2),

$$\rho^2x_2^2f_2(x_2x_3x_4, \, x_3x_4x_1, \, x_4x_1x_2, \, x_1x_2x_3) = f_2(X_{21}, X, X_{23}, X_{24}).$$

On en déduit, de l'équation de la surface Φ,

$$x_3x_4f_2(X_{21}, X, X_{23}, X_{24}) + x_1x_2\varphi_2(X, X_{21}, X_{31}, X_{41}) = 0$$

et finalement

$$X_{31}X_{12}f_2 + XX_{21}\varphi_2 = 0.$$

Cette équation représente une hypersurface V_{11}^4 passant par la surface Φ_1.

En combinant de toutes les manières possibles les lignes des équations (1) et (2), on obtient finalement 12 hypersurfaces d'ordre quatre qui ont en commun avec la variété V_3^{20} la surface Φ_1. Celle-ci est d'ordre 24 et ses sections hyperplanes sont de genre 13. Nous désignerons par R cet ensemble d'hypersurfaces.

A un plan

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4 = 0$$

correspond sur V_3^{20} une surface d'ordre 10 section de cette variété par l'espace à huit dimensions

$$\begin{aligned}
\lambda_1X \quad + \lambda_2X_{21} + \lambda_3X_{31} + \lambda_4X_{41} &= 0, \\
\lambda_1X_{12} + \lambda_2X \quad + \lambda_3X_{32} + \lambda_4X_{42} &= 0, \\
\lambda_1X_{13} + \lambda_2X_{23} + \lambda_3X \quad + \lambda_4X_{43} &= 0, \\
\lambda_1X_{14} + \lambda_2X_{24} + \lambda_3X_{34} + \lambda_1X \quad &= 0.
\end{aligned}$$

Les hypersurfaces de R coupent cette surface suivant une courbe d'ordre 12 et de genre quatre, transformée de la courbe Γ située dans le plan considéré.

De même, à une surface

$$\mu_1 x_2 x_3 x_4 + \mu_2 x_3 x_4 x_2 + \mu_3 x_4 x_1 x_2 + \mu_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

correspond une surface d'ordre 10 section de la variété V_3^{20} par l'espace à 8 dimensions d'équations

$$\begin{aligned}
\mu_4 X \;\; + \mu_2 X_{12} + \mu_3 X_{13} + \mu_4 X_{14} &= 0,\\
\mu_1 X_{21} + \mu_2 X \;\; + \mu_3 X_{23} + \mu_4 X_{24} &= 0,\\
\mu_1 X_{31} + \mu_2 X_{32} + \mu_3 X \;\; + \mu_4 X_{34} &= 0,\\
\mu_1 X_{41} + \mu_2 X_{42} + \mu_3 X_{43} + \mu_4 X \;\; &= 0,
\end{aligned}$$

et les hypersurfaces du groupe R découpent sur cette surface la courbe homologue de la courbe Γ' section de Φ par la surface cubique considérée.

7. Le modèle bicanonique normal de la surface F appartient à un espace à 13 dimensions S_{13}. C'est une surface double de support Φ_1 ayant comme courbe de diramation les transformées des courbes Γ_0 et Γ'_0.

La transformée de la courbe Γ_0 est la section de Φ_1 par l'hyperplan

$$\varphi_1(X,\ X_{21},\ X_{31},\ X_{41}) = 0$$

et celle de la courbe Γ_0 est la section de Φ_1 par l'hyperplan

$$\varphi'_1(X,\ X_{12},\ X_{13},\ X_{14}) = 0.$$

Il en résulte que l'on obtiendra les équations du modèle bicanonique de F en adjoignant aux équations de la variété V_3^{20} et à celles des hypersurfaces du groupe R, l'équation

$$X_0^2 = \varphi_1(X, X_{21}, X_{31}, X_{41})\varphi'_1(X, X_{12}, X_{13}, X_{14}).$$

8. Occupons-nous maintenant du cas général qui, comme nous l'avons dit, se traite suivant la même méthode que le cas envisagé ci-dessus.

Considérons que la surface Φ les systèmes linéaires

$$|\, G \,| = |\, 2n\Gamma \,|, \quad |\, G' \,| = |\, (2n-1)\Gamma + \Gamma' \,|$$

et soient G_0 une courbe déterminée du premier système et G'_0 une courbe déterminée du second.

Les courbes G sont découpées sur Φ par des surfaces d'ordre $6n$ passant $2n$ fois par les arêtes du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ et les courbes G' du second par les surfaces d'ordre $6n-2$ passant $2n-1$ fois par les arêtes du tétraèdre, ces surfaces ne contenant pas comme partie la surface Φ. Soient $\varphi_{6n}=0$ et $\varphi_{6n-2}=0$ les équations des surfaces découpant les courbes G_0 et G'_0. Considérons la surface F obtenue en adjoignant à l'équation de Φ l'équation

$$x_0^2\varphi_{6n-2}+\varphi_{6n}=0.$$

En modifiant les notations précédentes, nous désignerons par C et $\bar{C}$ les courbes correspondant sur F aux courbes G, G' et par C_0, $\bar{C}_0$ celles qui correspondent à G_0 et G'_0.

Les systèmes $|G|$ et $|G'|$ ont tous deux le genre $12n^2+1$ et le degré $24n^2$, donc les systèmes $|C|$ et $|\bar{C}|$ ont le genre $24n^2+1$ et le degré $48n^2$.

Les courbes C_0 et $\bar{C}_0$ ont le genre $12n^2+1$ et se rencontrent en $24n^2$ points.

On a

$$C\equiv 2C_0,\quad \bar{C}\equiv 2\bar{C}_0$$

et comme les systèmes G et G' sont adjoints l'un à l'autre, on a également

$$C'\equiv \bar{C}+C_0+\bar{C}_0,\quad \bar{C}'\equiv C+C_0+\bar{C}_0.$$

On en déduit que le système bicanonique de F est

$$|C_2|=|C''-C|=|C+\bar{C}|.$$

On a par conséquent

$$C'-C\equiv C_0+\bar{C}_0+\bar{C}-C$$

et l'unique courbe canonique de F se compose des courbes unies C_0, $\bar{C}_0$ et d'une courbe de degré zéro $C-\bar{C}$.

La surface F a les genres

$$p_a=p_g=1,\quad p^{(1)}=24n^2+1,\ P_2=24n^2+2.$$

9. On peut également considérer les systèmes de courbes

$$|G|=|(2n-1)\Gamma|,\quad |G'|=|2(n-1)\Gamma+\Gamma'|.$$

Les courbes du premier système sont découpées par les surfaces d'ordre $6n - 5$ passant $2(n - 1)$ fois par les arêtes du tétraèdre et les courbes du second par des surfaces d'ordre $6n - 3$ passant $2n - 1$ fois par les arêtes du tétraèdre, ces surfaces ne contenant pas Φ comme partie.

Choisissons une courbe G_0 de $| G |$ et une courbe G'_0 de $| G' |$ et soient

$$\varphi_{6n-5} = 0, \quad \varphi_{6n-3} = 0$$

les équations des surfaces qui les découpent sur Φ.

En adjoignant à l'équation de Φ l'équation

$$x_0^2\varphi_{6n-5} + \varphi_{6n-3} = 0,$$

on obtient une surface F.

En désignant encore par C_0, $\overline{C}_0$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes G_0, G'_0 et par C, $\overline{C}$ celles qui correspondent aux courbes G et G', on trouve encore que le système bicanonique de F est $| C + \overline{C} |$ et que la surface possède une unique courbe canonique

$$C_0 + \overline{C}_0 + \overline{C} - C.$$

Les systèmes $| G |$, $| G' |$ ayant le genre $3(2n - 1)^2 + 1$ et le degré $6(2n - 1)^2$, on trouve que la surface F a les genres

$$p_a = p_g = 1, \; p^{(1)} = 12(2n - 1)^2 + 1, \; P_2 = 12(2n - 1)^2 + 2.$$

Pour $n = 1$, on retrouve la surface étudiée au début de cette note.

10. Nous allons actuellement généraliser le théorème qui fait l'objet de la note citée au début.

Supposons qu'entre la surface d'Enriques Φ et une surface F existe une correspondance (1, 2) et qu'une courbe Γ_0 de Φ soit la courbe de diramation. Soit $\pi > 2$ le genre de la courbe Γ_0. Cette courbe appartient à un système linéaire $| \Gamma |$ de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$. Désignons par C_0 et C les courbes qui correspondent sur F à la courbe Γ_0 et aux courbes Γ. L'adjoint $| \Gamma' |$ à $| \Gamma |$ a les mêmes caractères que $| \Gamma |$ et nous désignerons par $| \overline{C} |$ le système qui lui correspond sur F.

La courbe C_0 est de genre π et les systèmes $|C|$, $|\bar{C}|$ sont de genre $2(\pi-1)+1$ et de degré $4(\pi-1)$. Par suite le degré de C_0 est égal à $\pi-1$.

On a

$$C \equiv 2C_0, \quad C' \equiv \bar{C} + C_0, \quad \bar{C}' \equiv C + C_0$$

et par conséquent le système bicanonique de F est

$$|C_2| = |C'' - C| = |2C_0| = |C|.$$

Le système tricanonique est

$$|C_3| = |C'| = |\bar{C} + C_0|.$$

Ce système a le genre $6(\pi-1)+1$, le degré $9(\pi-1)$ et la dimension

$$P_3 - 1 = p_a + 3(\pi-1).$$

Le système $|C_3|$ contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I dont Φ est l'image. L'un est formé de la courbe fixe C_0 et de la courbe variable $\bar{C}$. Ce système a la dimension $\pi-1$ de $|\bar{C}|$. Le second système a la dimension $p_a + 3(\pi-1) - 1$. En exprimant qu'il correspond sur Φ aux courbes de ce dernier système des courbes d'un système complet, on est conduit à l'existence de $\pi-1$ points unis isolés de l'involution I, base du dernier système envisagé.

On voit que comme dans le cas $\pi = 4$ étudié dans la note citée au début, la surface F est une surface double de support Φ ayant une courbe de diramation de genre π et $\pi-1$ points de diramation isolés.

La surface F possède une courbe canonique unique $C_0 + \bar{C} - C$ et a les genres

$$p_a = p_g = 1, \quad p^{(1)} = \pi, P_2 = \pi + 1, \quad P_3 = 3(\pi-1)+1.$$

Liège, le 10 novembre 1965.