Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique de genre quatre (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface de caractères $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 5$ distincte de celle qui a été construite dans la première note.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique de genre quatre

(seconde note)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface de caractères $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 5$ distincte de celle qui a été construite dans la première note.

Dans la première note (¹), nous avons construit une surface de caractères $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 5$ comme image d'une involution du troisième ordre appartenant à une surface algébrique. Dans cette seconde note, nous construisons une surface ayant les mêmes caractères par un procédé tout différent. Précisément, cette surface est une surface double dont le support est une surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, les éléments de diramation étant une section plane de la surface et trois points isolés.

Le théorème que nous établissons peut s'énoncer de la manière suivante :

Si f_2, φ_2 *sont des formes quadratiques et* φ_1 *une forme linéaire à quatre variables, les équations*

$$f_2(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,$$

$$x_0^2 = x_1\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

(¹) Voir le Bulletin de l'Académie, 1965, pp. 956-963.

représentent, dans un espace à quatre dimensions, une surface bicanonique de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 5$ *dont le diviseur de Severi est égal à deux.*

1. Rappelons tout d'abord quelques propriétés de la surface d'Enriques (1).

On peut prendre pour modèle projectif de cette surface soit la surface Φ du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, soit la surface Φ' du dixième ordre représentant sur l'hyperquadrique de Klein la congruence lieu des droites appartenant à ∞^1 quadriques d'un système linéaire triplement infini de quadriques de l'espace ordinaire.

Nous désignerons par Γ les sections planes de la surface Φ et par Γ' les courbes découpées sur cette surface par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. Le système $|\Gamma'|$ est l'adjoint à $|\Gamma|$ et ce système est à son tour l'adjoint à $|\Gamma'|$. Les systèmes $|2\Gamma|$ et $|2\Gamma'|$ coïncident.

Un système linéaire de courbes de genre $\pi > 1$ sur Φ ou sur Φ' a le degré $2(\pi - 1)$ et la dimensions $\pi - 1$.

Sur la surface Φ' existent 20 cubiques elliptiques isolées que nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{10}$ et $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{10}$. La cubique γ'_i est adjointe à γ_i et réciproquement ; ces deux cubiques ne se rencontrent pas. Deux des cubiques non adjointes l'une à l'autre se rencontrent en un point.

On peut prendre

$$|\Gamma| = |\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3| = |\gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3|.$$

Le système $|\Gamma|$ a le genre quatre, le degré six et la dimension trois. En rapportant projectivement les courbes Γ aux plans de l'espace, on obtient la surface Φ.

Aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ correspondent les arêtes doubles du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. Nous supposerons qu'aux trois premières de ces courbes correspondent respectivement les arêtes O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 et aux trois dernières respectivement les arêtes O_1O_4, O_2O_4, O_3O_4.

(1) Voir au sujet de cette surface ; F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Memorie della Società italiana delle Scienze, 1906, pp. 327-352). G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno e loro casi particolari* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1910, tome XXIX, pp. 1-21).

On a

$$| \Gamma' | = | \gamma'_1 + \gamma_2 + \gamma_3 | = | \gamma_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 |$$

et les courbes Γ' rencontrent les courbes Γ en des groupes (canoniques) de six points.

Les surfaces Φ et Φ' sont dépourvues de courbes exceptionnelles et de courbe canonique. Elles ont les genres

$$p_a = p_g = P_3 = \ldots = 0, \quad P_2 = P_4 = \ldots = 1.$$

La courbe bicanonique $2\Gamma' - 2\Gamma$ a l'ordre zéro.

Si f_2 et φ_2 sont des formes quadratiques à quatre variables, l'équation de la surface Φ, rapportée au tétraèdre $0_1 0_2 0_3 0_4$, s'écrit

$$\Phi \equiv f_2(x_2x_3x_4, x_3x_4x_1, x_4x_1x_2, x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Les sommets du tétraèdre $0_1 0_2 0_3 0_4$ sont triples pour la surface.

2. Considérons dans S_4 la surface F d'équations

$$\Phi = 0, \quad x_0^2 = x_4\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{1}$$

où φ_1 est une forme linéaire en x_1, x_2, x_3, x_4. Soit Γ_0 la section de la surface F par le plan $\varphi_1 = 0$.

Dans la correspondance (1, 2) entre les surfaces Φ et F, la courbe Γ_0 est une courbe de diramation. Par contre, les droites $0_2 0_3$, $0_3 0_1$, $0_1 0_2$ qui sont doubles pour Φ ne sont pas de diramation. Observons que les points 0_1, 0_2, 0_3 étant triples pour la surface Φ, il y a diramation dans le voisinage de ces points dans le plan $x_4 = 0$.

A la courbe Γ_0 correspond sur F une courbe C_0 de genre quatre. Aux courbes Γ, Γ' correspondent respectivement des courbes C_2, $\overline{C}_2$ de genre dix et de degré 12.

Les courbes $\overline{C}_2$ découpent la série canonique sur la courbe C_0.

A un groupe canonique d'une courbe Γ correspond sur la courbe C_2 homologue, un groupe qui, joint à la section de C_0 par la courbe C_2, donne un groupe canonique de cette courbe C_2. L'adjoint à $| C_2 |$ est donc

$$| C'_2 | = | C_0 + \overline{C}_2 |.$$

Un raisonnement analogue montre que l'on a

$$|\,\overline{C}_2'\,| = |\,C_0 + C_2\,|.$$

On a $C_2 \equiv 2C_0$ et d'autre part

$$|\,\overline{C}_2''\,| = |\,2C_0 + \overline{C}_2\,|,$$

par conséquent le système $|\,2C_0\,| = |\,C_2\,|$ est le système bicanonique de la surface F.

D'après le théorème de Castelnuovo-Enriques, la courbe canonique de F, si elle existe, est la courbe

$$C_0 + \overline{C}_2 - C_2 \equiv C_0 + C_2 - \overline{C}_2.$$

On a d'ailleurs, puisque $|\,2\Gamma\,| = |\,2\Gamma'\,|$,

$$|\,2C_2\,| = |\,2\overline{C}_2\,|.$$

3. Supposons que la courbe canonique de F n'existe pas et que le genre géométrique de cette surface soit donc $p_g = 0$.

Le système tricanonique de F est

$$|\,C_3\,| = |\,C_2'\,| = |\,C_0 + \overline{C}_2\,|,$$

a le genre 19, le degré 27 et la dimension $n \leqslant 9$.

Désignons par T la transformation birationnelle involutive de F engendrant l'involution I dont Φ est l'image.

Le système $|\,C_3\,|$ est transformé en soi par T.

Rapportons projectivement les courbes C_3 aux hyperplans d'un espace linéaire S_n à n dimensions et soit F_3 la surface obtenue. A T correspond une homographie harmonique de S_n transformant F_3 en elle-même.

Dans $|\,C_3\,|$ il y a ∞^2 courbes formées de la courbe fixe C_0 et d'une courbe $\overline{C}_2$ variable. On en déduit que la transformée de la courbe C_0 est une courbe d'ordre 9 appartenant à un espace à $n - 4 \leqslant 5$ dimensions, axe de l'homographie T. Le second axe de T est un espace S_3 à trois dimensions qui passe par les trois points unis isolés de T, homologues des points 0_1, 0_2, 0_3. Un hyperplan passant par S_3 coupe F_3 suivant une courbe de genre 19 possédant $9 + 3 = 12$ points unis. Il lui correspond sur Φ une courbe de genre sept appartenant à un système linéaire de dimension six. Mais alors, il devrait y avoir ∞^6 hyperplans passant par S_3, ce qui est absurde. On en conclut que la surface F a le genre $p_g > 0$.

La courbe canonique

$$C_1 \equiv C_0 + C_2 - \overline{C}_2$$

existe donc.

L'adjoint à la courbe C_0 est le système

$$| 2C_0 + \overline{C}_2 - C_2 | = | \overline{C}_2 |.$$

Ce système découpe sur la courbe C_0 la série canonique complète donc, d'après un théorème de Picard, la surface F est régulière $(p_a = p_g)$.

Le degré du système bicanonique $| C_2 |$ est égal à $4(p^{(1)} - 1) = 12$, donc le genre linéaire de la surface F est $p^{(1)} = 4$

4 Reprenons le système tricanonique

$$| C_3 | = | C_0 + \overline{C}_2 |,$$

de genre 19, de degré 27 et de dimension

$$P_3 - 1 = p_a + 9 = n,$$

où $n \geqslant 10$ puisque $p_a \geqslant 1$.

Considérons dans S_n la surface F_3 dont les sections hyperplanes sont les courbes C_3 et l'homographie harmonique T transformant F_3 en elle-même.

En répétant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'à la courbe C_0 correspond sur F_3 une courbe d'ordre neuf située dans un espace à $n - 4$ dimensions, axe de T. L'autre axe de T est un espace S_3 à trois dimensions contenant les trois points unis isolés de T. Aux sections de F par les hyperplans passant par S_3 correspondent sur Φ des courbes de genre 7 formant un système linéaire de dimension $n - 4 = 6$, d'où $n = 10$ et

$$P_3 - 1 = p_a + 9 = 10, \quad p_a = 1.$$

La surface F a donc les genres $p_a = p_g = 1$ et la courbe canonique C_1 est isolée et de genre quatre.

5. Puisque $p_a = 1$, on a $P_2 = p_a + p^{(1)} = 5$. La surface F d'équations (1) dans S_4 est donc un modèle bicanonique.

Dans cet espace T est une homogie harmonique de centre $O_0(1, 0, 0, 0, 0)$ et d'hyperplan $x_0 = 0$. Cet hyperplan rencontre F suivant la courbe

$$\Phi = 0, \quad x_4\varphi_1 = 0,$$

c'est-à-dire suivant la courbe Γ_0 et suivant les droites O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2. Convenons de représenter respectivement par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les courbes qui correspondent sur F aux droites doubles précédentes. On a

$$C_2 \equiv C_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

Observons que le système $|\overline{C}_2|$, de degré 12 et de genre 10, a également la dimension quatre et que l'on a

$$\overline{C}_2 \equiv C_0 + \gamma_1' + \gamma_2 + \gamma_3 \equiv \gamma_1 + \gamma_2' + \gamma_3',$$

en dénotant par $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ les courbes qui correspondent sur F aux droites de même symbole.

6. Le système tétracanonique $|C_4| = |2C_2|$ a le genre 31, le degré 48 et la dimension $P_4 - 1 = 19$. Il contient un système linéaire appartenant à l'involution I qui est l'homologue du système $|2\Gamma| = |2\Gamma'|$ sur Φ. Ce dernier système a le genre 13, le degré 24 et la dimension 12. Par conséquent $|C_4|$ contient un second système composé au moyen de I. Ce système a la dimension six ; les courbes contiennent comme partie la courbe C_0 et passent par les trois points unis isolés de l'involution I. La partie variable de ce système est formée des courbes $C_0 + C_2$, de genre 19, de degré effectif 24 et de dimension six.

7. Le système pentacanonique

$$|C_5| = |C_0 + C_2 + \overline{C}_2|$$

a le genre 46, le degré 75 et la dimension 31.

Il contient un système formé de la courbe fixe C_0 et des courbes $C_2 + \overline{C}_2$. Celles-ci correspondent aux courbes $\Gamma + \Gamma'$ de Φ, qui ont le genre 13, le degré 24 et la dimension 12. Par conséquent le système $C_2 + \overline{C}_2$ a la dimension 12.

Il en résulte que $|C_5|$ contient un second système appartenant à l'involution I, de dimension 18, dont les courbes passent par les trois points unis isolés de T. A ce système correspond sur Φ un système de courbes de genre 19, de degré 36 et de dimension 18. Le degré effectif du système des courbes $|C_5|$ considéré est égal à 72.

8. On voit aisément que l'on a pour les systèmes $2n$-canonique et $(2n + 1)$-canonique

$$|C_{2n}| = |nC_2|, \quad |C_{2n+1}| = |C_0 + (n - 1)C_2 + \overline{C}_2|.$$

Nous avons rencontré plus haut le système

$$|\overline{C}_3| = |C_0 + C_2| = |3C_0|.$$

Son adjoint est

$$|\overline{C}_3'| = |2C_0 + \overline{C}_2| = |\overline{C}_4|.$$

On a ensuite

$$|C_4'| = |3C_0 + C_2| = |\overline{C}_5|.$$

Plus généralement on a

$$|\overline{C}_{2n}| = |(n - 1)C_2 + \overline{C}_2|, \quad |\overline{C}_{2n+1}| = |C_0 + nC_2|.$$

Observons que l'on a

$$2C_2 \equiv 2\overline{C}_2$$

et par conséquent,

$$|2C_{2n}| = |2\overline{C}_{2n}| = |C_{4n}|, \qquad |2C_{2n+1}| = |2\overline{C}_{2n+1}| = |C_{4n} + C_2|.$$

Le diviseur de Severi de la surface F est par suite $\sigma = 2$.

Liège, le 27 octobre 1965.