Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique de genre quatre

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface d'ordre douze dans un espace à quatre dimensions, possédant une seule courbe canonique de genre quatre le long de laquelle un hyperplan touche la surface, dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques.

Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique de genre quatre

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface d'ordre douze dans un espace à quatre dimensions, possédant une seule courbe canonique de genre quatre le long de laquelle un hyperplan touche la surface, dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques.

Nos recherches sur les surfaces de genres zéro possédant un système bicanonique irréductible (1) nous ont conduit à chercher à construire des surfaces régulières possédant une seule courbe canonique de genre π. Nous avons résolu la question dans le cas $\pi = 3$ (2) et donné des exemples dans le cas $\pi = 5$ (3). Cette note est consacrée au cas $\pi = 4$.

Nous construisons une surface d'ordre douze, normale, dans un espace linéaire à quatre dimensions, possédant une seule courbe canonique de genre quatre et dont les sections hyperplanes constituent le système bicanonique. A vrai dire, nous obtenons les équations de cette surface par une voie détournée. Nous partons d'une surface F de S_4 intersection de deux hypersurfaces cubiques et dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques. Nous supposons cette surface transformée en soi par une homo-

(1) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (JOURNAL DE LIOUVILLE, 1965, pp. 27-41).

(2) *Construction de la surface bicanonique possédant une seule courbe canonique de genre trois* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1962, pp. 646-651).

(3) *Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1959, pp. 441-446; 1962, pp. 785-791).

graphie de période trois, déterminant sur F une involution I privée de points unis. Une image de cette involution donne la solution de la question posée. Nous montrons ensuite que dans les équations de cette surface, appartenant à un espace à quatre dimensions, on peut s'affranchir du fait que c'est l'image de l'involution I et nous parvenons au théorème suivant :

Soient F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22} *des formes algébriques du troisième degré,* F *une forme algébrique du second degré,* f *et* f' *des formes algébriques linéaires à cinq variables* x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. *Si l'on a identiquement*

$$F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = 0,$$

les équations

$$x_0[F_{22}f^2 + F_{11}f'^2 - (F_{12} + F_{21})ff'] - (F_{12} - F_{21})^2 = 0, \quad F = 0$$

représentent, dans un espace à quatre dimensions, une surface de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 5$. *L'hyperplan* $x_0 = 0$ *touche la surface le long de la courbe canonique et le système des sections hyperplanes est le système bicanonique. La surface possède une courbe double d'ordre dix-huit.*

La courbe canonique est découpée par l'hypersurface cubique passant par la courbe double, c'est-à-dire par $F_{12} - F_{21} = 0$.

En terminant, nous formons l'équation d'une variété à trois dimensions en partant d'une variété V intersection de deux hypersurfaces cubiques d'un espace à cinq dimensions et en procédant comme pour la surface F. Nous comptons revenir ultérieurement sur cette variété.

1. Soit F une surface de l'espace S_4 à quatre dimensions intersection de deux hypersurfaces cubiques, transformée en soi par une homographie cyclique H de période trois, possédant trois axes ponctuels : un point A et deux droites a_1, a_2. L'homographie H détermine sur F une involution I d'ordre trois. Les hypersurfaces cubiques déterminant F peuvent être choisies de manière que cette involution ne possède aucun point uni. Nous supposerons qu'il en est ainsi.

Les sections hyperplanes de F constituent le système canonique de la surface, qui a ainsi les genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 10$.

Le système $|C|$ des sections hyperplanes contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I : Une courbe isolée C_0 découpée par l'hyperplan contenant les droites a_1 et a_2, un faisceau $|C_1|$ dont les courbes sont découpées par les hyperplans passant par A et a_2, un faisceau $|C_2|$ dont les courbes sont découpées par les hyperplans passant par A et a_1.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I et par Γ_0, Γ_1, Γ_2 les courbes qui correspondent sur cette surface respectivement aux courbes C_0, C_1, C_2.

A une courbe canonique de Φ correspond sur F une courbe canonique appartenant à celui des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ qui a la dimension minimum, c'est-à-dire la courbe C_0. La courbe canonique de Φ est donc Γ_0 et cette surface a les genres $p_a = p_g = 1$.

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance (1,3) entre les courbes Γ_0 et C_0 donne pour la courbe Γ_0 le genre quatre. Le genre linéaire de Φ est donc $p^{(1)} = 4$.

Le bigenre de Φ est $P_2 = p_a + p^{(1)} = 5$. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F des courbes découpées par des hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H. Observons que sur la courbe Γ_0, les courbes Γ_1 et Γ_2 découpent des séries linéaires g_3^1 distinctes. Par conséquent les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$ découpent sur Γ_0 une série linéaire d'ordre six et de dimension au moins égale à trois et précisément de dimension trois d'après le théorème de Riemann-Roch. C'est donc la série canonique et le système $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est l'adjoint à $|\Gamma_0|$, c'est-à-dire est le système bicanonique de Φ.

Rapportons projectivement les courbes du système $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ aux hyperplans d'un espace S'_4 à quatre dimensions. Nous obtenons dans cet espace un modèle projectif de Φ que nous désignerons encore par Φ.

Observons qu'aux courbes du système $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ correspondent sur F les courbes du système $|C_1 + C_2|$ découpées par les hyperquadriques passant par les droites a_1, a_2. Parmi ces hyperquadriques se trouve l'hyperplan contenant a_1, a_2 compté deux fois. Donc, le système $\Gamma_1 + \Gamma_2$ contient la courbe $2\Gamma_0$ et il existe un hyperplan touchant la surface Φ le long de la courbe Γ_0.

Sur la surface Φ, on a

$$\Gamma'_0 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_0, \ \Gamma'_1 \equiv \Gamma_0 + \Gamma_1, \ \Gamma'_2 \equiv \Gamma_0 + \Gamma_2.$$

2. Supposons que l'homographie H ait pour équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^2 x_3 : \epsilon^2 x_4,$$

ϵ étant une racine cubique primitive de l'unité.

Les équations de la surface F peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &x_0 f(x_0^2,\ x_1x_3,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_2x_4) + \varphi(x_1,\ x_2) + \psi(x_3,\ x_4) = 0,\\ &x_0 f'(x_0^2,\ x_1x_3,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_2x_4) + \varphi'(x_1,\ x_2) + \psi'(x_3,\ x_4) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où f, f' sont linéaires, φ, φ', ψ, ψ' des formes binaires cubiques.

Rapportons projectivement les hyperquadriques

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x_4 + \lambda_3 x_2 x_3 + \lambda_4 x_2 x_4 = 0$$

aux hyperplans de l'espace S'_4 en posant

$$\frac{X_0}{x_0^2} = \frac{X_{13}}{x_1x_3} = \frac{X_{14}}{x_2x_4} = \frac{X_{23}}{x_2x_3} = \frac{X_{24}}{x_2x_4}.$$

Pour obtenir les équations de la surface Φ, nous devons éliminer les x entre les équations (1) et (2). On trouve tout d'abord

$$X_{13}X_{24} = X_{14}X_{23}. \quad (3)$$

Multiplions chacune des équations (1) par $x_1^3x_3^3 = X_{13}^3$. Nous obtenons

$$x_0X_{13}^3 f(X_{13},\ X_{14},\ X_{23},\ X_{24}) + x_1^3\varphi(X_{13},\ X_{23}) + x_3^3\psi(X_{13},\ X_{14}) = 0$$
$$x_0X_{13}^3 f'(X_{13},\ X_{14},\ X_{23},\ X_{24}) + x_1^3\varphi'(X_{13},\ X_{23}) + x_3^3\psi'(X_{13},\ X_{14}) = 0.$$

On en tire

$$\frac{x_0X_{13}^3}{\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix}} = \frac{x_1^3}{\begin{vmatrix} \psi & f \\ \psi' & f' \end{vmatrix}} = \frac{x_3^3}{\begin{vmatrix} f & \varphi \\ f' & \varphi' \end{vmatrix}},$$

d'où

$$X_0X_{13}^3(\varphi f' - \varphi' f)(\psi f' - \psi' f) + (\varphi\psi' - \varphi'\psi)^2 = 0. \quad (4)$$

Observons que l'on a, en utilisant la relation (3),

$$\varphi\psi = X_{13}^3F_{11},\quad \varphi'\psi' = X_{13}^3F_{22},\quad \varphi\psi' = X_{13}^3F_{12},\quad \varphi'\psi = X_{13}^3F_{21},$$

où F_{11}, F_{22}, F_{12}, F_{21} sont des formes cubiques en X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}

(où manquent les termes contenant trois variables distinctes). On a d'ailleurs identiquement

$$F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = 0. \tag{5}$$

L'équation précédente devient

$$X_0[F_{22}f^2 + F_{11}f'^2 - (F_{12} + F_{21})ff'] + (F_{12} - F_{21})^2 = 0. \tag{6}$$

C'est l'équation d'une hypersurface du sixième ordre qui, jointe à l'équation (3), représente la surface Φ.

Les équations de la courbe canonique Γ_0 sont

$$X_0 = 0, \;\; X_{13}X_{24} - X_{14}X_{23} = 0, \;\; F_{12} - F_{21} = 0,$$

qui représentent bien une courbe du sixième ordre et de genre quatre le long de laquelle l'hyperplan $X_0 = 0$ touche la surface Φ.

3. L'hypersurface représentée par l'équation (4) est l'enveloppe de la famille d'hypersurfaces

$$\lambda^2 X_0 X_{13}(\varphi f' - \varphi' f) + 2\lambda(\varphi\psi' - \varphi'\psi) - X_{13}^2(\psi f' - \psi' f) = 0$$

et passe doublement par les points communs aux hypersurfaces

$$\varphi f' - \varphi' f = 0, \;\; \varphi\psi' - \varphi'\psi = 0, \;\; \varphi f' - \psi' f = 0 \tag{7}$$

et en particulier par la surface

$$\begin{Vmatrix} f & \varphi & \psi \\ f' & \varphi' & \psi' \end{Vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Ces équations représentent une surface d'ordre 15 mais elle n'est pas irréductible.

Les équations (7) peuvent s'écrire

$$F_{11}f' - F_{21}f = 0, \;\; F_{12} - F_{21} = 0, \;\; F_{11}f' - F_{21}f = 0$$

et les équations (8) deviennent

$$\begin{Vmatrix} f & F_{11} & F_{11} \\ f' & F_{21} & F_{12} \end{Vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que la surface (8) contient comme partie la surface $f = 0$, $F_{11} = 0$.

On démontre de même que la surface (8) contient comme partie la surface $f' = 0$, $F_{22} = 0$. Il reste une surface D d'ordre 9, double pour l'hypersurface (4) et par conséquent pour l'hypersurface (6) qui lui est birationnellement identique.

Observons que l'équation de l'hypersurface (4) peut s'écrire, en multipliant par $\varphi\psi$, sous la forme

$$X_0(F_{11}f' - F_{21}f)(F_{11}f' - F_{12}f) + F_{11}(F_{12} - F_{21})^2 = 0,$$

d'où l'on passe à l'équation (6) en remarquant que le coefficient de f^2 est $F_{12}F_{21} = F_{11}F_{22}$ et en divisant par F_{11}.

La surface D est située sur l'hypercône $F_{12} - F_{21} = 0$.

4. Revenons à la surface Φ. Elle est l'intersection de l'hypersurface (6) et de l'hyperquadrique (3). Elle possède une courbe double D' d'ordre 18, intersection de la surface D et de l'hyperquadrique (3). Elle possède en outre six points doubles situés dans le plan α et sur les hypersurfaces (3) et $F_{12} - F_{21} = 0$. Enfin, le point $0(1, 0,0,0,0)$ est multiple d'ordre 6 pour la surface.

Les courbes canoniques de la surface φ sont découpées par les hypersurfaces cubiques passant par la courbe double D'. Or cette courbe, d'ordre 18, est située sur le cône cubique $F_{12} - F_{21} = 0$, donc ce cône est la seule hypersurface cubique adjointe à Φ et la courbe canonique de cette surface est bien la courbe Γ_0.

Remarquons qu'une section hyperplane de la variété (6) est une surface du sixième ordre possédant une courbe double d'ordre 9 intersection de la surface avec une surface cubique. Les sections planes de cette surface sont donc des courbes elliptiques et la surface est rationnelle.

5. Le point essentiel pour démontrer que la surface Φ possède une seule courbe canonique est l'existence de la courbe D' et cette existence dépend de la relation (5).

Cela étant, supposons que F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22} soient des formes cubiques en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 telles que l'on ait l'identité (5). Soient en outre F une forme quadratique et f, f' deux formes linéaires par rapport aux même variables.

Considérons la surface

$$x_2[F_{11}f'^2 - (F_{12} + F_{21})ff' + F_{22}f^2] + (F_{12} - F_{21})^2 = 0, \quad F = 0.$$

On peut répéter point par point le raisonnement précédent et montrer que la surface précédente possède une courbe double d'ordre 18, dont les équations sont

$$\begin{vmatrix} f & F_{11} & F_{11} \\ f' & F_{24} & F_{21} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} f & F_{12} & F_{21} \\ f' & F_{22} & F_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de remarquer que l'équation de la variété du sixième ordre contenant la surface peut s'écrire

$$x_0[F_{11}^2 f'^2 - F_{11}(F_{12} + F_{21})ff' + F_{12}F_{21}f^2] + (F_{12} - F_{21})^2 F_{11} = 0$$

ou

$$x_0(F_{11}f' - F_{12}f)(F_{11}f' - F_{21}f) + (F_{12} - F_{21})^2 F_{11} = 0.$$

Ainsi se trouve établi le théorème énoncé au début.

6. Plaçons-nous maintenant dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions et considérons la variété V à trois dimensions d'équations

$$\left.\begin{aligned} x_0 f_0 + x_1 f_1 + \varphi(x_2, x_3) + \psi(x_4, x_5) = 0, \\ x_0 f_0' + x_1 f_1' + \varphi'(x_2, x_3) + \psi(x_4, x_5) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où f_0, f_1, f_0', f_1' sont des formes linéaires en $x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5$ et $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ des formes cubiques de leurs arguments.

Cette variété V est transformée en elle-même par l'homographie H d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : x_5' = x_0 : x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon x_3 : \epsilon^2 x_4 : \epsilon^2 x_5$$

de période trois et cette homographie détermine sur V une involution I d'ordre trois, dépourvue de points unis.

Soit Ω une image de l'involution I dans l'espace S_6 à six dimensions de coordonnées

$$\rho X_{ik} = x_i x_k,$$

i et k étant choisis de telle sorte que $f = 0$ par exemple représente un hyperplan.

La variété Ω appartient tout d'abord aux hyperquadriques

$$X_{00}X_{11} = X_{01}^2, \quad X_{24}X_{35} = X_{25}X_{34}. \qquad (2)$$

En multipliant les deux équations (1) par $x_2 x_4$ et en procédant comme dans le cas de la surface F, on obtient l'équation

$$X_{00}X_{24}^3[\varphi\psi f_0'^2 + \varphi'\psi' f_0^2 - (\varphi\psi' + \varphi'\psi) f_0 f_0']$$
$$+ X_{01}X_{24}^3[2\varphi\psi f_0' f_1' + 2\varphi'\psi' f_0 f_1 - (\varphi\psi' + \varphi'\psi)(f_0' f_1 + f_0 f_1')]$$
$$+ X_{11}X_{24}^3[\varphi\psi f_1'^2 + \varphi'\psi' f_1^2 - (\varphi\psi' + \varphi'\psi) f_1 f_1'] + (\varphi\psi' - \varphi'\psi)^2 = 0.$$

où f_0, f_1, f_0', f_1' sont des formes linéaires en $X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{35}$, φ et φ' des formes cubiques en X_{24}, X_{34} et ψ, ψ' des formes cubiques en X_{25}, X_{25}.

En posant

$$\varphi\psi = X_{24}^3 F_{11},\ \varphi\psi' = X_{24}^3 F_{12},\ \varphi'\psi = X_{24}^3 F_{21},\ \varphi'\psi' = X_{24}^3 F_{22},$$

d'où

$$F_{11}F_{22} = F_{12}F_{21},$$

l'équation précédente devient

$$F_{11}(X_{00} f_0'^2 + 2X_{01} f_0' f_1' + X_{11} f_1'^2) + F_{22}(X_{00} f_0^2 + 2X_{01} f_0 f_1 + X_{11} f_1^2)$$
$$- (F_{12} + F_{21})[X_{00} f_0 f_0' + X_{21}(f_0' f_1 + f_0 f_1') + X_{11} f_0 f_1']$$
$$+ (F_{12} - F_{21})^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une hypersurface d'ordre six qui, jointe aux équations (2), représente la variété Ω, d'ordre 24.

Nous reviendrons plus tard sur cette variété. Notons que comme elle représente une involution privée de points unis appartenant à une variété V possédant une surface canonique d'ordre zéro, elle possède la même propriété.

Remarquons que les hyperplans.

$$X_{01} = \lambda X_{00},\ X_{11} = \lambda X_{01}$$

coupent Ω suivant des surfaces Φ.

Liège, le 19 août 1965.