Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq (Troisième Note)

Lucien Godeaux

Résumé

Une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, d'un espace linéaire à cinq dimensions, est le support d'une surface double possédant une seule courbe canonique de genre cinq, la courbe de diramation étant une section hyperplane de la première surface.

Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq
(Troisième Note),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, d'un espace linéaire à cinq dimensions, est le support d'une surface double possédant une seule courbe canonique de genre cinq, la courbe de diramation étant une section hyperplane de la première surface.

Nous avons à plusieurs reprises cherché à construire des surfaces algébriques possédant une seule courbe canonique de genre cinq [1]. Cette note est une nouvelle contribution à ce problème ; nous y utilisons les propriétés des involutions du second ordre appartenant à une surface algébrique [2].

Nous considérons sur une surface F intersection complète de quatre hyperquadriques d'un espace linéaire à six dimensions une involution du huitième ordre engendrée par des homographies harmoniques. L'une de ces homographies est une homologie, les involutions engendrées par trois autres sont privées de points unis et les involutions engendrées par les trois dernières ont chacune seize points unis. L'involution d'ordre huit a pour image une surface Φ de genre $p_a = P_4 = 1$ appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions.

Les trois involutions privées de points unis appartiennent à

(1) Les deux premières notes ont paru dans ce Bulletin en 1959, pp. 441-446 et en 1964, pp. 785-791.

(2) Voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Ed. Cremonese, 1963).

une involution du quatrième ordre dont l'image est une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq. Nous démontrons que cette surface est la surface Φ double, la courbe de diramation étant une section hyperplane de Φ. En étendant ce raisonnement, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La surface double ayant pour support une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, *située dans un espace linéaire à cinq dimensions et ayant pour courbe de diramation une section hyperplane de cette surface, est une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq.*

1. On sait que la surface intersection complète de quatre hyperquadriques dans un espace linéaire S_6 à six dimensions a pour courbes canoniques ses sections hyperplanes.

Considérons dans l'espace S_6 les homographies harmoniques

$$H_1 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = H_1 H_2 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & -x_3 & x_4 & -x_5 & x_6 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Elles engendrent un groupe trirectangle. Une surface F, intersection complète de quatre hyperquadriques, transformée en soi par les homographies précédentes, a pour équations

$$\varphi_i(x_2, x_1) + \psi_i(x_2, x_3) + \chi_i(x_4, x_5) + a_i x_6^2 = 0, \ (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

où les φ, les ψ et les χ sont des formes quadratiques binaires de leurs arguments. On peut d'ailleurs supposer, sans restreindre la généralité, que a_2, a_3, a_4 sont nuls.

Les équations (1) montrent que F est également transformée en soi par l'homologie harmonique

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & -x_6 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

et cette homologie engendre sur F une involution du second ordre ayant comme courbe unie la section de F par l'hyperplan $x_6 = 0$.

2. Pour obtenir les équations d'une surface F_1 image de l'involution I_1 engendrée par H_1, rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_{15} à 15 dimensions les hyperquadriques de S_6 transformées en elles-mêmes par H_1 et ne passant pas par les axes ponctuels de cette homographie. Si nous convenons d'appeler O_i le point de S_6 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i, ces axes sont l'espace à trois dimensions $O_0O_1O_2O_3$ et le plan $O_4O_5O_6$.

Posons $X_{ik} = x_i x_k$. Nous obtenons les équations

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} & X_{03} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{03} & X_{12} & X_{23} & X_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ X_{45} & X_{55} & X_{56} \\ X_{46} & X_{56} & X_{66} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

les déterminants des premiers membres étant de caractéristique un.

D'autre part, aux hyperquadriques (1) correspondent quatre hyperplans

$$\Phi_1(X) + aX_{66} = 0, \Phi_2(X) = 0, \Phi_3(X) = 0, \Phi_4(X) = 0, \qquad (3)$$

Les premières des équations (2) représentent, dans un espace S_9 à neuf dimensions, la variété de Veronese Ω_3 correspondant aux quadriques de l'espace $O_0O_1O_2O_3$ et les secondes des équations (2) représentent la surface de Veronese Ω_2 correspondant aux coniques du plan $O_4O_5O_6$. Ω_3 est d'ordre huit et Ω_2 d'ordre quatre. Les équations (2) représentent donc dans S_{15} une variété V_6^{32} d'ordre 32, lieu des droites s'appuyant sur Ω_3 et Ω_2.

Les équations (3) représentent quatre hyperplans ayant en commun un espace linéaire à onze dimensions qui coupe la variété V_6^{32} suivant la surface F_1.

Puisque l'involution I_1 est privée de points unis, entre les genres arithmétiques $p_a = 7$ de F et p'_a de F_1, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 3$. D'autre part la surface F étant régulière, il en est de même de F_1 et le genre géométrique de cette surface est $p'_g = 3$.

Les courbes canoniques de F_1 correspondent aux courbes découpées sur F par les hyperplans

$$\lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 + \lambda_6 x_6 = 0,$$

c'est-à-dire appartiennent aux hyperplans

$$\lambda_4 X_{44} + \lambda_5 X_{45} + \lambda_6 X_{46} = 0, \quad \lambda_4 X_{45} + \lambda_5 X_{55} + \lambda_{56} X_6 = 0,$$
$$\lambda_4 X_{46} + \lambda_5 X_{56} + \lambda_6 X_{66} = 0,$$

passant par S_9.

Il résulte de la théorie des involutions que l'hyperplan

$$\lambda_4^2 X_{44} + \lambda_5^2 X_{55} + \lambda_6^2 X_{66} + 2\lambda_5\lambda_6 X_{56} + 2\lambda_6\lambda_4 X_{46} + 2\lambda_4\lambda_5 X_{45} = 0$$

touche la surface F_1 le long d'une courbe canonique.

Les courbes canoniques de F_1 sont d'ordre 16 et de genre 9.

Les hyperquadriques de S_6 découpent sur F les courbes bicanoniques de cette surface, donc le système bicanonique de F_1 est celui des sections hyperplanes. On a $P_2 = 12$.

3. Aux homographies H_2 et H_3 correspond une homographie H_{12} de l'espace S_{15} qui transforme F_1 en elle-même.

Les axes ponctuels de H_{12} sont l'espace S_5 à cinq dimensions d'équations

$$X_{00} = X_{01} = X_{11} = X_{22} = X_{23} = X_{33} = X_{44} = X_{45}$$
$$= X_{55} = X_{66} = 0$$

et l'espace S_9 à neuf dimensions d'équations

$$X_{02} = X_{03} = X_{12} = X_{13} = X_{46} = X_{56} = 0.$$

L'involution du second ordre I_{12} engendrée sur F_1 par l'homographie H_{12} est privée de points unis, puisque les involutions engendrées sur F par H_2 et H_3 le sont. Il en résulte qu'entre le genre arithmétique $p'_a = 3$ de F_1 et celui p''_a de F_{12}, on a la relation

$$p'_a + 1 = 2(p''_a + 1),$$

d'où $p''_a = 1$. F_{12} étant comme F_1 régulière, on a $p''_g = 1$.

La courbe canonique de F_{12} correspond à la courbe découpée sur F par l'hyperplan $x_6 = 0$; elle est par conséquent de genre cinq.

Pour obtenir les équations de la surface F_{12}, projetons la surface F_1 de l'axe S_5 de l'homographie H_{12} sur l'autre axe S_9 de cette homographie. Nous obtenons les équations

$$X_{00}X_{11} - X_{01}^2 = 0, \; X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, \; X_{44}X_{55} - X_{45}^2 = 0 \quad (4)$$

jointes aux équations (3), représentant quatre hyperplans passant par l'espace S_5.

Les équations (4) représentent dans l'espace S_9 une variété conique V_6^8, d'ordre huit, de sommet O_{66}. Dans cet espace S_9, les équations (3) représentent un espace à cinq dimensions coupant le cône V_6^8 suivant une surface Φ d'ordre huit.

Observons que la surface F_1 étant d'ordre 32, la surface F_{12} devrait être d'ordre 16. Nous en concluons que la surface F_{12} est la surface Φ comptée deux fois.

A l'homologie harmonique H correspond dans l'espace S_{15} une homographie harmonique H' ayant comme axes ponctuels la droite $O_{46}O_{56}$ et un espace S_{12} d'équations

$$X_{46} = X_{56} = 0.$$

L'homographie H' transforme en soi la surface F_1 et d'autre part forme avec H_{12} un groupe trirectangle. On en conclut que la surface Φ représente l'involution du quatrième ordre engendrée sur F_1 par les homographies H' et H_{12}.

4. La surface Φ appartient à un espace S_5 à cinq dimensions et est l'intersection complète de trois hyperquadriques linéairement indépendantes, donc c'est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

Dans le passage de la surface Φ à la surface double F_{12}, il y a une courbe de diramation D'. D'après un théorème de Castelnuovo, la transformée d'une courbe canonique de Φ augmentée de la courbe unie D, homologue de D', donne une courbe canonique de F_{12}. Or, la transformée d'une courbe canonique de Φ est d'ordre zéro, par conséquent la courbe D est la courbe canonique de F_{12} et cette courbe est unique.

On a vu que la courbe canonique de F_{12} correspond à la section de F_1 par l'hyperplan $X_{66} = 0$, par suite la courbe D' est une section hyperplane de Φ.

Le système bicanonique de F_{12} est le système $|2D|$, c'est-à-dire le système qui correspond au système des sections hyperplanes de Φ dans la correspondance (1, 2) entre Φ et F_{12}.

La courbe D est de genre cinq et les courbes bicanoniques 2D sont, d'après la formule de Zeuthen, de genre 13.

5. Le raisonnement qui vient d'être fait peut être généralisé.

Considérons dans un espace S_5 une surface Φ de genres $p_a = P_4 = 1$ intersection complète de trois hyperquadriques.

La surface double F_0 de support Φ ayant comme courbe de diramation une section hyperplane D' de Φ, possède une courbe canonique unique, de genre cinq.

En effet, la transformée d'une courbe canonique de Φ, qui est d'ordre zéro, augmentée de la courbe unie D, donne une courbe canonique de F_0. Cette surface possède donc une unique courbe canonique D, de genre cinq.

6. Remarquons en terminant que les homographies H, H_1, H_2, H_3 engendrent sur F une involution d'ordre huit dont Φ est l'image.

Les homographies $H_4 = HH_3$, $H_5 = HH_2$, $H_6 = HH_1$ engendrent sur F des involutions du second ordre possédant chacune 16 points unis.

Les groupes d'homographies (H_1, H_4, H_5), (H_2, H_4, H_6), (H_3, H_5, H_6), (H, H_1, H_6), (H, H_2, H_5), (H, H_3, H_4) sont des groupes trirectangles.

L'étude des surfaces représentant les involutions engendrées sur F par ces différentes homographies présente de l'intérêt. On trouve par exemple que la surface image de l'involution engendrée par H est de genres $p_a = P_4 = 1$.

Liège, le 6 septembre 1965.