Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface algébrique de diviseur quatre

Lucien Godeaux

Résumé
Construction dans un espace linéaire à six dimensions d'une surface dont le système canonique est composé au moyen d'une involution d'ordre deux et dont le diviseur de Severi est égal à quatre.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface algébrique de diviseur quatre

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction dans un espace linéaire à six dimensions d'une surface dont le système canonique est composé au moyen d'une involution d'ordre deux et dont le diviseur de Severi est égal à quatre.

Dans un travail antérieur (¹), nous avons construit des surfaces dont le diviseur de Severi est égal à deux en utilisant la représentation de l'involution d'ordre deux engendrée par une homographie biaxiale harmonique d'un hyperespace. Le même procédé pourrait être utilisé pour construire des surfaces de diviseur quelconque et notamment des surfaces dont le diviseur est une puissance de deux. Bien que cette question soit quasi immédiate, nous nous arrêterons dans cette note sur un cas particulier, la surface obtenue possédant des propriétés qui nous parraissent dignes de remarques. Nous établissons précisément le théorème suivant :

Si l'on considère dans un espace linéaire à onze dimensions quatre plans ne se rencontrant pas deux à deux et dans chacun de ces plans une conique irréductible, les cônes projetant chaque conique de l'espace à huit dimensions déterminé par les trois plans qui ne la

(¹) *Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1959, pp. 373-380).

contiennent pas, on obtient une variété à sept dimensions et d'ordre 16. La section de cette variété par un espace linéaire à six dimensions est une surface F_0 *possédant 32 points doubles coniques et dont les sections hyperplanes forment le système canonique. La surface double de support* F_0 *ayant comme points de diramation les 32 points doubles de cette surface a le diviseur de Severi égal à quatre. Son système canonique est formé des courbes canoniques doubles de* F_0.

La surface double obtenue représente une involution abélienne d'ordre quatre appartenant à une surface intersection de cinq hyperquadriques dans un espace à sept dimensions [1].

1. Considérons dans un espace linéaire S_7 à sept dimensions le groupe composé par les quatre homographies biaxiales harmoniques

$$H_1 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 & x_5 & x_6 & -x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} -x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & x_6 & x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}.$$

On a

$$H_1H_2 = H_3H_4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix},$$

$$H_1H_3 = H_2H_4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 & x & -x_6 & -x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix},$$

$$H_1H_4 = H_2H_3 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & x_6 & x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix},$$

[1] Pour les propriétés des involutions utilisées, voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

et les homographies considérées engendrent dans S_7 une involution d'ordre huit. Les axes des homographies H_1, H_2, H_3, H_4 sont une droite et un espace à cinq dimensions. Ceux des trois dernières homographies sont des espaces à trois dimensions. Observons que ces trois dernières homographies forment un groupe trirectangle.

Les hyperquadriques de S_7 transformées en elles-mêmes par l'homographie H_1H_2 forment deux familles,

$$\Sigma\lambda_{ik}x_ix_k = 0, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3\ ;\ 4, 5, 6, 7), \tag{1}$$

$$\Sigma\mu_{ik}x_ix_k = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3\ ;\ k = 4, 5, 6, 7). \tag{2}$$

Rapportons projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_{19} à 19 dimensions. En posant $X_{ik} = x_ix_k$ et en éliminant les x, on obtient les équations

$$| X_{ik} | = 0, \ (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{3}$$

$$| X_{jh} | = 0, \ (j, h = 4, 5, 6, 7) \tag{4}$$

les déterminants des premiers membres étant de caractéristique un.

Dans l'espace $X_{44} = \ldots = X_{77} = 0$, les équations (3) représentent une variété de Veronese Ω_1, image des quadriques d'un espace à trois dimensions, d'ordre huit, appartenant à un espace à neuf dimensions, Σ_1. De même, dans l'espace Σ_2, d'équations $X_{00} = \ldots = X_{33} = 0$, les équations (4) représentent une variété de Veronese Ω_2 d'ordre huit, analogue à Ω_1.

Dans l'espace S_{19}, les équations (3) et (4) représentent une variété V_7^{64} à sept dimensions, d'ordre 64, lieu des droites s'appuyant sur les variétés de Veronese Ω_1, Ω_2. Chacune de ces variétés est multiple d'ordre huit pour la variété V_7^{64}.

La variété V_7^{64} représente l'involution d'ordre deux engendrée par l'homographie H_1H_2 dans S_7. Une droite de V_7^{64} représente les couples de points de cette involution situés sur une droite unie de l'homographie H_1H_2.

Si l'on élève le premier membre de l'équation (2) au carré, on obtient

$$\Sigma\mu_{ik}\mu_{ik}X_{ij}X_{hk} = 0,$$

c'est-à-dire une hyperquadrique passant par les espaces Σ_1, Σ_2 et rencontrant V_7^{64} suivant une variété réglée à six dimensions.

D'après la théorie des involutions, cette hyperquadrique touche la varité V_7^{64} le long de chacune des droites de cette variété à six dimensions. Celle-ci est donc d'ordre 64 également.

Pour obtenir une image de l'involution d'ordre huit engendrée dans S_7 par les homographies considérées, observons que le système des hyperquadriques appartenant à cette involution et ne passant pas par les axes des homographies a pour équation la somme de quatre formes quadratiques l'une en x_0, x_1, la seconde en x_2, x_3, la troisième en x_4, x_5, et la dernière en x_6, x_7. Cette équation a 12 coefficients et en rapportant projectivement les hyperquadriques en question aux herperplans d'un espace S_{11} à onze dimensions, on obtient les équations

$$X_{01}^2 - X_{00}X_{11} = 0, \quad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0, \quad X_{45}^2 - X_{44}X_{55} = 0,$$
$$X_{67}^2 - X_{66}X_{77} = 0.$$

Elles représentent une variété V_7^{16} de dimension sept et d'ordre 16.

La variété V_7^{16} est l'image d'une involution d'ordre quatre appartenant à la variété V_7^{64}.

2. Ces points rappelés, représentons par $A_i(x_0, x_1)$, $B_i(x_2, x_3)$, $C_i(x_4, x_5)$, $D_i(x_6, x_7)$ des formes quadratiques de leurs arguments et considérons les équations

$$A_i + B_i + C_i + D_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{5}$$

les premiers membres étant linéairement indépendants.

Ces hyperquadriques ont en commun une surface F, d'ordre 32, transformée en soi par les homographies considérées. Celles-ci déterminent sur F une involution I d'ordre huit.

Dans les espaces S_{19}, S_{11} rencontrés plus haut, les équations (5) se traduisent par les équations de cinq hyperplans.

Dans l'espace S_{19} ces hyperplans coupent la variété V_7^{64} suivant une surface F_{12}, d'ordre 64, représentant l'involution d'ordre deux engendrée sur F par l'homographie H_1H_2. Cette surface est normale dans un espace S_{14} à quatorze dimensions.

Observons que les courbes canoniques de F sont découpées sur cette surface par les hyperquadriques de S_7, donc les sections hyperplanes de F_{12} forment le système canonique de la surface.

On verra du reste plus loin que le genre géométrique de la surface F_{12} est $p_g = 15$.

L'image de l'involution I, d'ordre huit, est la section de la variété V_7^{16} de S_{11} par les hyperplans correspondant aux équations (5). C'est une surface F_0 d'ordre 16 appartenant donc à un espace à six dimensions. Ses sections hyperplanes constituent son système canonique. Son genre géométrique est donc $p_g = 7$. Cela résulte d'ailleurs d'un théorème d'Enriques sur les surfaces intersections complètes de cinq hyperquadriques dans un espace à sept dimensions.

3. L'homographie H_1H_2 a pour axes deux espaces à trois dimensions et la surface F n'a aucun point commun avec ces espaces, donc l'involution I_{12} engendrée par H_1H_2 sur la surface F est dépourvue de points unis. Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F_{12}, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1).$$

Les hyperquadriques de S_7 découpent sur F le système canonique et d'autre part la surface étant intersection complète d'hyperquadriques, est régulière. On a donc $p_g = p_a = 31$. On en déduit $p'_a = p'_g = 15$ car F étant régulière, il en est de même de F_{12}. On a ainsi confirmation du résultat obtenu plus haut.

Aux homographies H_1, H_2 correspond dans S_{19} une même homographie H'_1 dont les équations sont

$$\rho X'_{02} = -X_{02},\ \rho X'_{03} = -X_{03},\ X\rho'_{12} = -X_{12},\ X\rho'_{13} = -X_{13},$$
$$X'_{ik} = X_{ik} \text{ pour les autres coordonnées.}$$

De même aux homographies H_3, H_4 de S_7 correspond une homographie H_2 de S_{19} dont les équations sont

$$\rho X'_{46} = -X_{46},\quad \rho X'_{47} = -X_{47},\quad \rho X'_{56} = -X_{56},\quad \rho X'_{57} = -X_{57},$$
$$\rho X'_{ik} = X_{ik} \text{ pour les autres coordonnées.}$$

Aux homographies $H_1\ H_3$, $H_1\ H_4$ correspond dans S_{19} une même homographie H' et on voit que $H' = H'_1H'_2$.

Les homographies H', H'_1, H'_2 forment un groupe trirectangle et engendrent sur F_{12} une involution d'ordre quatre dont F_0 est une image.

Observons que les involutions déterminées sur F par les homographies H_1H_3 et H_1H_4 sont dépourvues de points unis, donc l'involution I′ déterminée sur F_{12} par l'homographie H′ est dépourvue de points unis.

On en déduit que la surface F′ image de l'involution I′, qui est régulière, a les genres $p_a = p_g = 7$.

4. Sur F, l'homographie H_1 détermine une involution I_1 d'ordre deux, possédant 32 points unis. En effet, un des axes de l'homographie H_1 est un espace à cinq dimensions qui rencontre F en 32 points.

Ces 32 points se répartissent en 16 couples de points communs aux involutions I_{12} engendrée par H_1H_2 et I_2 engendrée par H_2. A ces 16 couples correspondent sur F_1 16 points unis pour l'involution I_1.

De même, les 32 points unis de l'involution I_2 engendrée par l'homographie H_2 se répartissent en 16 couples unis de l'involution I_1. Celle-ci possède donc 32 points unis.

L'involution I_2' possède de même 32 points unis.

Désignons par F_1' une surface image de l'involution I_1'. Entre les genres arithmétiques $p_a = 15$ de F_{12} et p_a' de F_1', nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.32,$$

d'où $p_a' = 11$. La surface F_1' est régulière et a les genres $p_g = p_a = 11$. Ses sections hyperplanes forment le système canonique.

La surface F_1' appartient à la variété d'ordre 32 d'équations

$$X_{01}^2 - X_{00}X_{11} = 0, \quad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0, \quad \text{et } (4)$$

située dans un espace à 15 dimensions. Elle est découpée sur cette variété par un espace à 10 dimensions.

Aux involutions I′ et I_2' de la surface F_{12} correspond, sur F_1', une involution I_1'' d'ordre deux. Les 32 points unis de l'involution I_2' forment 16 couples de points communs aux involutions I′ et I_1' et il leur correspond sur F_1' 16 points unis de l'involution I_1''. Une surface image de l'involution I_1'' est la surface F_0. Entre les genres arithmétiques $p_a = 7$ de F_1' et p_a' de F_0, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.16,$$

d'où $p_a' = 7$ comme on l'avait déjà obtenu plus haut.

Les 32 points de diramation de la correspondance (1,2) entre les surfaces F_1' et F_{12} sont doubles coniques pour la première de ces surfaces et il leur correspond 16 points doubles coniques de la surface F_0. D'autre part, les 16 points de diramation pour la correspondance (1,2) entre les surfaces F_0 et F_1' sont doubles coniques pour F_0. Cette surface possède donc 32 points doubles coniques.

5. Soit F' une surface image de l'involution I' de la surface F_{12}. Cette involution étant dépourvue de points unis, le genre arithmétique de F' est $p_a = 7$.

Aux involutions I_1', I_2' de F_{12} correspond sur F' une involution I'' possédant 32 points unis. Cette involution a pour image la surface F_0. Entre les genres arithmétiques $p_a = 7$ de F' et $p_a' = 7$ de F_0, nous devons avoir la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.32,$$

ce qui est une identité.

Les surfaces F' et F_0 sont régulières comme F et leurs systèmes canoniques ont la même dimension $p_g - 1 = 6$. Il en résulte que l'on peut prendre comme modèle projectif de F' la surface double de support F_0 avec comme points de diramation les 32 points doubles coniques de F_0.

Entre les surfaces F' et F, nous avons une correspondance (1,4) privée de points de diramation, donc la surface F' a le diviseur de Severi $\sigma = 4$.

Il en est d'ailleurs de même de F_0.

6. Reprenons les équations de la surface F_0. Cette surface appartient à la variété V_7^{16} de S_{11} d'équations

$$X_{01}^2 - X_{00}X_{11} = 0, \qquad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0,$$
$$X_{45}^2 - X_{44}X_{55} = 0, \qquad X_{67}^2 - X_{66}X_{77} = 0.$$

et est la section de cette variété par un espace S_8 à dix dimensions.

La première des équations représente une conique Γ_1 située dans le plan σ_1 d'équations $X_{22} = X_{23} = \ldots = X_{77} = 0$. Désignons de même par Γ_2, Γ_3, Γ_4 les coniques situées dans les plans σ_2, σ_3, σ_4 définies de la même manière en partant des autres équations précédentes.

Les plans σ_1, σ_2 σ_3, σ_4 ne se rencontrent pas deux à deux et la variété V_7^{16} appartient aux cônes projetant chacune des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 de l'espace à huit dimensions déterminé par ceux des plans σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 qui ne la contiennent pas.

L'espace S_8 contenant les plans $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ coupe l'espace S_6 contenant F_0 suivant un espace à trois dimensions S_3 qui est double pour le cône projetant Γ_1 de S_8 et par conséquent pour V_7^{16}. Dans cet espace S_3, les trois derniers des cônes contenant V_7^{16} déterminent trois quadriques se rencontrant en huit points appartenant à F_0 et qui sont doubles pour cette surface. En chacun de ces points le cône tangent à la surface projette la conique Γ_1.

Les 32 points doubles coniques de F_0 se répartissent huit par huit dans les espaces à huit dimensions déterminés par trois des plans σ_1, σ_2, σ_3, σ_4.

7. Le système canonique de F étant découpé par les hyperquadriques de S_7, le genre linéaire de cette surface est $p^{(1)}$ $2^7 + 1$. Les points doubles coniques d'une surface n'avant aucune influence sur le système canonique de celle-ci, les genres linéaires des surfaces F_{12}, F', F_0 sont respectivement égaux à $2^6 + 1$, $2^5 + 1$, et $2^4 + 1$.

Liége, le 28 juin 1965.