Bulletin de la Classe des sciences

Une involution appartenant à une surface intersection d'hyperquadriques

Lucien Godeaux

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une involution appartenant à une surface intersection d'hyperquadriques

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie.

Dans cette courte note nous appliquons à un cas particulier qui nous paraît intéressant la théorie des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, que nous avons développée dans un ouvrage récent [1]. L'involution envisagée appartient à une surface intersection d'hyperquadriques et possède six points unis de structures différentes.

Comme nous l'avons montré, la structure d'un point uni, c'est-à-dire l'ensemble des points unis infiniment voisins du point uni considéré, dépend de deux nombres entiers α, β. Ceux-ci se déterminent en considérant l'involution induite dans le plan tangent à la surface au point uni envisagé.

1. Soit, dans un espace linéaire S_{2p-1}, à $2p-1$ dimensions, une homographie H d'équations

$$\rho x_0' = x_0, \rho x_1' = x_1, \rho x_2' = \epsilon x_2, \rho x_3' = \epsilon x_3, \dots$$
$$\rho x_{2i}' = \epsilon^i x_{2i}, \rho x_{2i+1}' = \epsilon^i x_{2i-1}, \dots,$$
$$\rho x_{2p-2}' = \epsilon^{p-1} x_{2p-2}, \rho x_{2p-1}' = \epsilon^{p-1} x_{2p-1},$$

où p est un nombre premier impair et ϵ une racine primitive d'ordre p de l'unité.

---

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications.* Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nº 11 (Roma, Edizioni Cremonese, 1963).

Nous représenterons par $\varphi_2(x_i, x_k)$ une forme quadratique en x_i, x_k et par $\psi_{11}(x_i, x_k\,;\, x_j, x_l)$ une forme bilinéaire en x_i, x_k et en x_j, x_l, les cefficients de ces formes étant variables et n'étant pas les mêmes d'une équation à l'autre.

Il existe p systèmes linéaires d'hyperquadriques $|\,Q_0\,|$, $|\,Q_1\,|$, ..., $|\,Q_{p-1}\,|$ transformées en elles-mêmes par l'homographie H. Le système $|\,Q_0\,|$ a pour équation

$$\varphi_2(x_0, x_1) + \psi_{11}(x_2, x_3\,;\, x_{2p-2}, x_{2p-1}) + \ldots = 0.$$

Le système $|\,Q_i\,|$ a pour équation

$$\varphi_2(x_{2i}, x_{2i+1}) + \psi_{11}(x_0, x_1\,;\, x_{4i}, x_{4i+1}) + \ldots = 0.$$

Lorsque l'on effectue l'homographie H, les équations des hyperquadriques Q_0, Q_1, ..., Q_{p-1} se reproduisent multipliées par $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}$ pris dans un certain ordre.

2. Considérons la surface F intersection d'une hyperquadrique de chacun des systèmes $|\,Q_0\,|$, $|\,Q_1\,|$, $|\,Q_2\,|$ et de deux hyperquadriques de chacun des systèmes $|\,Q_3\,|$, $|\,Q_4\,|$, ..., $|\,Q_{p-1}\,|$. La surface F est d'ordre 2^{2p-3} et ses courbes canoniques C sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $2p - 6$.

Le genre arithmétique de F est (¹)

$$p_a = [(2p-3)^2 - 5(2p-3) + 8]\, 2^{2p-6} - 1,$$

c'est-à-dire

$$p_a = (2p^2 - 11p + 16)\, 2^{2p-5} - 1.$$

Son genre linéaire est

$$p^{(1)} = (p-3)^2\, 2^{2p-1} + 1.$$

3. Sur la surface F, l'homographie H engendre une involution I d'ordre p.

Si nous désignons par O_k le sommet de la pyramide de référence dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_k, les axes ponctuels de l'homographie H sont les droites O_0O_1, O_2O_3, ..., $O_{2i}O_{2i-1}$, ..., $O_{2p-2}O_{2p-1}$.

(¹) Voir notre note *Sur les courbes et surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1944, pp. 262-269).

La surface F ne rencontre que les trois premiers axes, chacun en deux points et l'involution I possède donc six points unis.

Les points unis de I situés sur la droite O_0O_1 ont évidemment même structure et pour étudier celle-ci, nous supposerons que le terme en x_0^2 manque dans l'équation de l'hyperquadrique Q_0 passant par F. Le point O_0 est alors un des points unis de I situé sur la droite O_0O_1. L'hyperplan tangent en O_0 à Q_0 est alors $x_1 = 0$. Les hyperplans tangents en ce point à Q_1 et Q_2 sont respectivement

$$\psi_{11}(1,\ 0\ ;\ x_4,\ x_5) = 0, \quad \psi_{11}(1,\ 0\ ;\ x_8,\ x_9) = 0$$

où les coefficients sont naturellement constants.

L'espace S_{2p-3} tangent en O_0 aux deux hyperquadriques de Q_3 passant par F est donné par $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$.

Et ainsi de suite. Le plan tangent à la surface F en O_0 appartient à tous les hyperplans de la pyramide fondamentale sauf aux quatre hyperplans $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_8 = 0$, $x_9 = 0$. Ce plan s'appuie donc sur la droite O_4O_5 en un point P_5 et sur la droite O_8O_9 en un point P_8. Dans ce plan, H détermine une homographie non homologique dont les points unis sont O_0, P_4, P_8. Si nous désignons par y_0, y_4, y_8 les coordonnées d'un point de ce plan, l'homographie déterminée par H a pour équations

$$y_0' : y_4' : y_8' = y_0 : \epsilon^3 y_4 : \epsilon^4 y_8.$$

Le point uni O_0 est donc caractérisé par les nombres $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}(p + 1)$.

4. Considérons les points unis de l'involution I situés sur la droite O_2O_3 et supposons que l'un de ceux-ci soit le point O_2. En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que le plan tangent à F en O_2 s'appuie en un point P_6 sur O_6O_7 et en un point P_{2p-2} sur $O_{2p-2}O_{2p-1}$. Dans ce plan, l'homographie H détermine l'homographie

$$y_2' : y_6' : y_{2p-2}' = \epsilon^2 y_2 : \epsilon^3 y_6 : \epsilon^{2p-1} y_{2p-2}.$$

ou, en posant $\eta = \epsilon^2$

$$y_2' : y_6' : y_{2p-2}' = y_2 : \eta y_6 : \eta^{p-1} y_{2p-2}.$$

Le point uni O_2 est donc caractérisé par les nombres $\alpha = \beta = p - 1$. C'est ce que nous avons appelé un point uni symétrique.

Supposons enfin que parmi les points unis de l'involution I situés sur la droite O_4O_5 se trouve le point O_4. On trouve que le plan tangent à F en O_4 rencontre la droite O_0O_1 en un point P_0 et la droite $O_{2p-4}O_{2p-3}$ en un point P_{2p-4}. Dans ce plan, l'homographie H détermine l'homographie

$$y'_4 : y'_0 : y'_{2p-4} = \epsilon^2 y_4 : y_0 : \epsilon^{p-2} y_{2p-4}$$

c'est-à-dire, en posant $\eta = \epsilon^{p-2}$

$$y'_4 : y'_0 : y'_{2p-4} = y_4 : \eta y_0 : \eta^2 y_{2p-4}.$$

Le point uni O_4 est donc caractérisé par les nombres $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}(p+1)$.

On voit donc que des six points unis de l'involution I sur la surface F, deux sont des points unis symétriques ($\alpha = \beta = p - 1$) et quatre des points unis caractérisés par $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}(p+1)$.

5. Désignons par F' une surface image de l'involution I.

Le système canonique $|C|$ de F, découpé sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $p - 3$, contient certainement p systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I. Supposons que le premier $|C_0|$ soit le transformé du système canonique $|C'|$ de F'.

Rappelons que les points unis symétriques d'une involution n'appartiennent pas au système $|C_0|$ mais interviennent pour $p^2 - 1$ unités dans la relation entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F'.

Par contre, un point uni caractérisé par $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{1}{2}(p+1)$ contient, dans son domaine du premier ordre, deux points unis dont l'un est un point uni de première espèce. Le point de diramation correspondant est équivalent à deux courbes rationnelles γ_0, γ_1, la première de degré virtuel $-\frac{1}{2}(p+1)$, la seconde de degré virtuel -2. Les courbes C_0 passent $\frac{1}{2}(p-1)$ fois par un tel point et par le point uni de première espèce qui lui est infiniment voisin. Dans la relation entre p_a et p'_a le point intervient pour $\frac{1}{2}(p-1)(p-11)$ unités.

On a donc

$$12(p_a+1) = 12p(p'_a+1) - 2(p^2-1) + \frac{4}{2}(p-1)(p-11),$$

d'où, en remplaçant p_a par sa valeur donnée plus haut,

$$p(p'_a+1) = (2p^2-11p+16)2^{2p-5} + 2(p-1).$$

Il faut encore prouver que le second membre est multiple de p. Nous pouvons écrire

$$p(p'_a+1) = p(2p+5)2^{2p-5} - 2(p-1)(2^{p-1}-1)(2^{p-1}+1)$$

et, p étant premier, le facteur $2^{p-1}-1$ est multiple de p d'après le théorème de Fermat.

Les courbes canoniques C_0 passent $\frac{1}{2}(p+1)-2 = \frac{1}{2}(p-3)$ fois par les quatre points unis situés sur les droites O_0O_1 et O_4O_5 et par les points unis de première espèce infiniment voisins, donc le genre linéaire $p'^{(1)}$ de F′ est donné par

$$p^{(1)}-1 = 2^{2p-1}(p-3)^2 = p(p'^{(1)}-1) + 2(p-3)^2,$$

d'où

$$p(p'^{(1)}-1) = 2(p-3)^2(2^{p-1}-1)(2^{p-1}+1).$$

Le second membre est divisible par p d'après le théorème de Fermat.

Liège, le 7 décembre 1964.