Bulletin de la Classe des sciences

# Remarque sur une suite de Laplace associée à une surface

Lucien Godeaux

**Résumé**

Résumé. — Construction de relations linéaires entre sept points consécutifs de la suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions associée à une surface.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

# Remarque sur la suite de Laplace associée à une surface

par Lucien GODEAUX.
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — Construction de relations linéaires entre sept points consécutifs de la suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions associée à une surface.

A une surface $(x)$ rapportée à ses asymptotiques $u, v$, nous avons associé dans l'espace à cinq dimensions une suite de Laplace L déterminée par les points de l'hyperquadrique de Klein Q représentant les tangentes aux asymptotiques de la surface $(x)$ [1]. Entre sept points consécutifs de la suite L existe une relation linéaire. Nous montrons comment on peut obtenir ces relations.

1. Soit $(x)$ une surface rapportée à ses asymptotiques $u, v$. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de $S_5$, qui représente les tangentes $xx_u$, $xx_v$ aux asymptotiques $u$, $v$ de $(x)$. On a

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0$$

et ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent à une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad (L)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$.

[1] Voir notre exposé sur *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé*. Actualités scientifiques, n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

En posant

$$h_i = -(\log bh_1h_2 \dots h_{i-1})_{uv} + h_{i-1},$$

$$k_i = -(\log ak_1k_2 \dots k_{i-1})_{uv} + k_{i-1},$$

on a

$$\mathrm{U}^i_v = \mathrm{U}^{i+1} + \mathrm{U}^i(\log bh_1 \dots h_i)_v, \quad \mathrm{U}^{i+1}_u = h_{i+1}\mathrm{U}^i,$$

$$\mathrm{V}^i_u = \mathrm{V}^{i+1} + \mathrm{V}^i(\log ak^1 \dots k_i)_u, \quad \mathrm{V}^{i+1}_v = k_{i+1}\mathrm{V}^i.$$

Nous avons établi les relations

$$2\mathrm{V}^3 + 2\mathrm{V}^2(\log a^3k_1^2k_2)_u + 2\alpha_1\mathrm{V}^1 + \alpha(\log a^2\alpha)_u\mathrm{V}$$
$$+ 4b[\beta\mathrm{U} + \mathrm{U}^1(\log bh_1)_v + \mathrm{U}^2] = 0,$$

$$2\mathrm{U}^3 + 2\mathrm{U}^2(\log b^3h_1^2h_2)_v + 2\beta_1\mathrm{U}^1 + \beta(\log b^2\beta)_v\mathrm{U}$$
$$+ 4a[\alpha\mathrm{V} + \mathrm{V}^1(\log ak_1)_u + \mathrm{V}^2] = 0.$$

2. Posons

$$\mathrm{M} = 2\mathrm{V}^3 + 2\mathrm{V}^2(\log a^3k_1^2k_2)_u + \dots + 4b\mathrm{U}^2,$$

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{U}^3 + 2\mathrm{U}^2(\log b^3h_1^2h_2)_u + \dots + 4a\mathrm{V}^2.$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$\mathrm{M}_v + 2b\mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{N}_u + 2a\mathrm{M} = 0$$

et les fonctions M, N sont transformées de Laplace l'une de l'autre.

La fonction M satisfait à l'équation de Laplace

$$\mathrm{M}_{uv} - 2\mathrm{M}_v(\log b)_u - 4ab\mathrm{M} = 0$$

et le transformé de Laplace de M dans le sens des $u$ est

$$\mathrm{M}^1 = \mathrm{M}_u - \mathrm{M}(\log b)_u.$$

La fonction $\mathrm{M}^1$ est linéaire en $\mathrm{V}^4$, $\mathrm{V}^3$, ..., $\mathrm{U}^1$. Elle ne contient pas $\mathrm{U}^2$ car le coefficient de $\mathrm{U}^2$ est $4a(\log b)_u - 4a(\log b)_u = 0$.

Les transformées successives de Laplace de M dans le sens des $u$ peuvent se représenter par la formule

$$\mathrm{M}^i = \mathrm{M}^{i-1}_u - \mathrm{M}^{i-1}(\log bh_1h_2 \dots h_{i-1})_u.$$

$M^i$ est une fonction linéaire de $V^{i-3}$, $V^{i-2}$, ..., $V^{i+3}$ (si $i = 1$, $V^{-2}$ doit être remplacé par $U^1$, si $i = 2$, $V^{-1}$ par $U$, si $i = 3$, $V^0$ par $V$).

En effet, $M^1$, $M^2$, ..., $M^i$ contiennent les termes $2V^4$, $2V^5$, ..., $2V^{i+3}$. Supposons que $M^i$ contienne un terme en $V^{i-4}$. Comme on a

$$M^i_v = h_i M^{i-1}, \quad V^{i-4} = k_{i-4} V^{i-5},$$

$M^{i-1}$ contiendrait un terme en $V^{i-5}$, $M^{i-2}$ un terme en $V^{i-6}$, ..., $M^1$ un terme en $U^2$, contrairement à ce que nous avons établi.

*L'équation* $M^i = 0$ *est une relation linéaire entre les sept points consécutifs* $V^{i-3}$, $V^{i-2}$, ..., $V^{i+3}$ *de la suite* L.

3. La fonction N satisfait à l'équation de Laplace

$$N_{uv} - 2N_u(\log a)_v + 4abN = 0$$

et ses transformés de Laplace dans le sens des $v$ ont

$$N^1 = N_v - N(\log a)_v,$$

$$N^2 = N^1_v - N^1(\log ak_1)_v,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$N^i = N^{i-1}_v - N^{i-1}(\log ak_1k_2 \dots k_{i-1})_v, \dots$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que :

*L'équation* $N^i = 0$ *est une relation linéaire entre les sept points consécutifs* $U^{i-3}$, $U^{i-2}$, ..., $U^{i+3}$ *de la suite* L.

Si $i = 0$, $U^{-3}$ doit être remplacé par $V^2$, si $i = 1$, $U^{-2}$ par $V^1$, si $i = 2$, $U^{-1}$ par $V$.

Liége, le 28 décembre 1963.