Sur les directrices de Wilczynski des surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Étude des relations entre les directrices de Wilczynski de deux surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin et de questions connexes.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les directrices de Wilczynski des surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude des relations entre les directrices de Wilczynski de deux surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin et de questions connexes.

A une surface (x), de l'espace ordinaire, rapportée à ses asymptotiques u, v, nous avons attaché dans un espace à cinq dimensions une suite de Laplace L déterminée par les points U, V de l'hyperquadrique Q de Klein représentant les tangentes xx_u, xx_v aux asymptotiques u, v en un point de la surface (x). Le point U est le transformé de Laplace de V dans le sens des v et V celui de U dans le sens des u (Bompiani, Tzitzeica). Lorsque le point U^3, troisième transformé de Laplace de U dans le sens des v, appartient à l'hyperquadrique Q et qu'il en est de même du point V^3, troisième transformé de V dans le sens des u, la suite L a la période huit. La droite U^3V^3 appartient à Q et il existe une surface $(\bar{x})$ dont les asymptotiques sont les lignes u, v, la tangente $\bar{x}\bar{x}_u$ étant représentée par le point V^3 et la tangente $\bar{x}\bar{x}_v$ par le point U^3. Les surfaces (x), $(\bar{x})$ ont alors mêmes quadrilatères de Demoulin, c'est-à-dire que les quadriques de Lie attachées aux surfaces (x), $(\bar{x})$ en deux points homologues x, $\bar{x}$ se rencontrent suivant les arêtes du tétraèdre de Demoulin correspondant.

Nous avons, dans des notes antérieures, étudié les surfaces (x), $(\bar{x})$ et notamment établi les équations donnant le point $\bar{x}$ en fonction du point x [1]. Nous voudrions revenir sur ces surfaces pour étudier les relations existant entre leurs directrices de Wilczynski et quelques questions connexes. Nous montrons pour commencer que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite L ait la période huit est que les points U^3, V^3 appartiennent à l'hyperquadrique de Klein. Nous établissons ensuite les équations des directrices de Wilczynski de la surfaces $(\bar{x})$ ainsi que celles de la droite $x\bar{x}$ et de la droite commune aux plans tangents aux surfaces (x), $(\bar{x})$ en deux points homologues. Nous terminons en donnant deux relations entre les invariants de la suite L [2].

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfant au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x_{uu} + 2bx_v + c_1x = 0, \quad x_{vv} + 2ax_u + c_2x = 0.$$

Les points

$$U = | x \quad x_u |, \quad V = | x \quad x_v |$$

de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 satisfont aux équations

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0$$

et appartiennent à une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. La suite L est autopolaire par rapport à Q.

(1) *Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1953, pp. 243-252, 363-368).

(2) Pour les notations et les symboles utilisés ici, voir notre exposé sur *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé*, Actualités scient., N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Il y a cependant quelques différences dans nos notations : les numéros d'ordre sont placés en haut et les dérivations sont indiquées en indices, ceci pour nous mettre en accord avec les notations habituellement utilisées actuellement.

Désignons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, l'équation de cette hyperquadrique étant $\Omega(p, p) = 0$.

Supposons que les points U^3, V^3 appartiennent à Q, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Omega(U^3, U^3) = 0, \quad \Omega(V^3, V^3) = 0.$$

Nous allons montrer que le point V^4 coïncide avec le point U^3.

L'hyperplan polaire de U^3 par rapport à Q touche cette hyperquadrique en U^3 ; il contient les points V^1, V^2, V^3, V^4, V^5 et les points U^2, U^4 puisque le plan $U^2U^3U^4$ touche Q en U^3. L'hyperplan polaire de V^4 est $U^2U^3U^4U^5U^6$. Il contient le point V^3 et on a donc $\Omega(V^4, V^3) = 0$. En dérivant cette relation par rapport à v, on a $\Omega(V^4, V^2) = 0$. En dérivant de nouveau cette relation par rapport à v et en observant que $\Omega(V^3, V^2) = 0$, on a $\Omega(V^3, V^1) = 0$. L'hyperplan polaire de V^4 contient donc les points V^1, V^2, V^3, U^3, U^2 et coïncide avec l'hyperplan polaire de U^3, on en conclut que les points U^3 et V^4 coïncident. On démontre de même que les points U^4 et V^3 coïncident et la suite L a la période huit.

Inversement, si la suite L a la période huit, le point U^3 coïncide avec le point V^1 et est son propre conjugué, il appartient donc à Q. Il en est de même du point V^3.

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite L *ait la période huit est que les points* U^3, V^3 *appartiennent à l'hyperquadrique* Q *de Klein.*

Observons que la droite U^3V^3 appartient à l'hyperquadrique Q. Elle représente un faisceau de rayons de sommet $\bar{x}$. Lorsque u, v varient, le point $\bar{x}$ décrit une surface $(\bar{x})$. Nous avons montré que les asymptotiques de cette surface sont les courbes u, v et que l'on a

$$V^3 = | \bar{x} \quad \bar{x}_u |, \quad U^3 = | \bar{x} \quad \bar{x}_v |.$$

2. Nous poserons pour abréger,

$$H = (\log b)_v, \quad H_2 = (\log b^3h_1^2h_2)_v, \quad K = (\log a)_u,$$
$$K_2 = (\log a^3k_1^2k_2)_u,$$

$$\theta = \frac{1}{2a}\beta\,(\log b^2\beta)_v = \frac{1}{2b}\,\alpha\,(\log a^2\alpha)_u,$$

$$M = KK_2 - \alpha_1, \; N = HH_2 - \beta_1.$$

Nous avons établi les relations

$$U^3 + H_2U^2 + \beta_1U^1 + b\theta U + 2a(\alpha V + KV^1 + V^2) = 0,$$

$$V^3 + K_2V^2 + \alpha_1V^1 + a\theta V + 2b(\beta U + HU^1 + U^2) = 0.$$

On en déduit

$$\Omega(U^3, U^1) = -2(HH_2 - \beta_1)\Delta = -2N\Delta,\ \Omega(U^3, U) = -2H_2\Delta,$$
$$\Omega(U^3, V) = 4a\Delta,$$

$$\Omega(V^3, V^1) = 2M\Delta,\quad \Omega(V^3, V) = 2K_2\Delta,\quad \Omega(V^3, U) = -4b\Delta.$$

3. Désignons par

$$W^1 = U^1 + V^1,\ W^2 = U^1 - V^1$$

les points de Q qui représentent les directrices de Wilczynski w^1, w^2 attachées au point x de la surface (x). On sait que la droite w^1 passe par le point x et que la droite w^2 se trouve dans le plan tangent à (x) en x.

Soient $\overline{W}^1$ et $\overline{W}^2$ les points de Q qui représentent les directrices de Wilczynski $\bar{w}^1$, $\bar{w}^2$ de la surface $(\bar{x})$ attachées au point $\bar{x}$ homologue de x. Nous supposerons que la droite $\bar{w}^1$ passe par $\bar{x}$, la droite $\bar{w}^2$ se trouvant dans le plan tangent à $(\bar{x})$ en $\bar{x}$.

Le plan UVW^1 appartient à Q et représente la gerbe de rayons de sommet x. De même, le plan $U^3V^3\overline{W}^1$ appartient à Q et représente la gerbe de rayons de sommet $\bar{x}$. Il en résulte que ces deux plans ont en commun un point R^1 qui représente la droite $r^1 = x\bar{x}$.

Supposons que l'on ait

$$R^1 = \lambda U + \mu V + \nu W^1.$$

Le point R^1 est conjugué des points U^3, V^3 et on a

$$\frac{1}{\Delta}\Omega(U^3, R^1) = -2H_2\lambda + 4a\mu - 2N\nu = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\Omega(V^3, R^1) = -4b\lambda + 2K_2\mu + 2M\nu = 0.$$

On trouve donc

$$R^1 = (2aM + K_2N)U + (2bN + H_2M)V + (4ab - H_2K_2)W^1.$$

Les points $\overline{W}^1$, $\overline{W}^2$ sont les intersections de Q avec la droite U^2V^2. Posons

$$\overline{W}^1 = \lambda_1 U^2 + \mu_1 V^2.$$

Les points R^1 et $\overline{W}^1$ sont conjugués, donc on a

$$\Omega\,(R^1, \overline{W}^1) = \lambda_1 \Omega\,(R^1, U^2) + \mu_1 \Omega\,(R^1, V^2) = 0.$$

On a

$$\frac{1}{\Delta}\,\Omega\,(R^1, U^2) = 2\,(2aM + K_2N) + 2H\,(4ab - H_2K_2),$$

$$\frac{1}{\Delta}\,\Omega\,(R^1, V^2) = -2\,(2bN + H_2M) - 2K\,(4ab - H_2K_2).$$

On peut donc écrire

$$\overline{W}^1 = (2bN - H_2\alpha_1 + 4abK)\,U^2 - (2aM - K_2\beta_1 + 4abH)\,V^2.$$

4. Les plans UVW^2 et $U^3V^3\overline{W}^2$ appartiennent à Q et représentent respectivement les plans réglés tangents aux surfaces (x), $(\bar{x})$ en deux points homologues x, $\bar{x}$. Ils ont donc en commun un point R^2 représentant la droite r^2 commune à ces deux plans tangents. Écrivons

$$R^2 = \lambda U + \mu V + \nu W^2.$$

Nous avons

$$\frac{1}{\Delta}\,\Omega\,(R^2, U^3) = -2H_2\lambda + 4a\mu - 2N\nu = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\,\Omega\,(R^2, V^3) = -4b\lambda + 2K_2\mu - 2M\nu = 0.$$

On en conclut

$$R^2 = (2aM - K_2N)\,U - (2bN - H_2M)\,V - (4ab - H_2K_2)\,W^2.$$

Si nous posons

$$\overline{W}^2 = \lambda_2 U^2 + \mu_2 V^2$$

nous avons

$$\overline{W}^2 = (2bN + H_2\alpha_1 - 4abK)\,U^2 + (2aM + K_2\beta_1 - 4abH)\,V^2.$$

5. Si nous écrivons que l'on a

$$\Omega\ (U^3, U^3) = 0,\ \Omega\ (U^3, U^2) = 0,\ \Omega\ (V^3, V^3) = 0,\ \Omega\ (V^3, V^2) = 0,$$

nous trouvons les quatre relations

$$\beta_1 N = a\ (4a\alpha - H_2\theta), \tag{1}$$

$$HN = a\theta - \beta H_2, \tag{2}$$

$$\alpha_1 M = b\ (4b\beta - K_2\theta), \tag{3}$$

$$KM = b\theta - \alpha K_2. \tag{4}$$

En éliminant θ entre les équations (1) et (3), puis entre les équations (2) et (4), on obtient

$$bK_2\ (\beta_1 N - 4a^2\alpha) = aH_2\ (\alpha_1 M - 4b^2\beta),$$

$$b\ (HN + \beta H_2) = a\ (KM + \alpha K_2).$$

Par conséquent on a

$$bN\ (K_2\beta_1 - 4abH) = aM\ (H_2\alpha_1 - 4abK).$$

Posons

$$\frac{K_2\beta_1 - 4abH}{aM} = \frac{H_2\alpha_1 - 4abK}{bN} = 2\varphi.$$

Les expressions de $\overline{W}^1$, $\overline{W}^2$ s'écrivent

$$\overline{W}^1 = 2\ (1 - \varphi)\ (bNU^2 - aMV^2),$$

$$\overline{W}^2 = 2\ (1 + \varphi)\ (bNU^2 + aMV^2).$$

Les points $\overline{W}^1$, $\overline{W}^2$ sont les intersections de la droite U^2V^2 avec Q, par conséquent les quantités λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2 satisfont à l'équation

$$\lambda^2\Omega\ (U^2,\ U^2) + \mu^2\Omega\ (V^2,\ V^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta + H^2)\ \lambda^2 - (\alpha + K^2)\ \mu^2 = 0.$$

On peut prendre $\lambda_1 = bN$, $\mu_1 = -aM$ et $\lambda_2 = bN$, $\mu_2 = aM$. On doit avoir

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = 0,$$

$$b^2N^2\ (\beta + H^2) = a^2M^2\ (\alpha + K^2).$$

On vérifie aisément que ces relations sont des identités en vertu des équations (1) à (4).

6. Dans la seconde des notes citées au début, nous avons indiqué les conditions pour que les points U^3, V^3 appartiennent à Q, ce sont les relations

$$N^2 + H_2(\beta H_2 - 2a\theta) + 4a^2\alpha = 0,$$
$$M^2 + K_2(\alpha K_2 - 2b\theta) + 4b^2\beta = 0.$$

Ces conditions remplies, le point $\bar{x}$ appartient aux plans

$$H_2 z^1 + N z^3 - 2a\alpha z^4 = 0,$$
$$H_2 z^2 - 2a z^3 - N z^4 = 0,$$
$$K_2 z^1 + M z^2 - 2b\beta z^4 = 0,$$
$$-2b z^2 + K_2 z^3 - M z^4 = 0.$$

On obtient ainsi les équations locales du point $\bar{x}$ sous la forme

$$\rho z_1 = 2a\alpha K_2 + 2b\beta H_2 - MN - 4ab\theta,$$
$$\rho z_2 = 2aM + K_2 N,$$
$$\rho z^3 = 2bN + H_2 M,$$
$$\rho z^4 = H_2 K_2 - 4ab.$$

On a donc

$$\bar{x} = (2a\alpha K_2 + 2b\beta M_2 - MN - 4ab\theta)\, x$$
$$+ (2aM + K_2 N)\, m + (2bN + H_2 M)\, n + (H_2 K_2 - 4ab)\, y.$$

Les coordonnées du point $\bar{x}$ données ici sont plus simples que celles que nous avons données précédemment, mais elles sont évidemment équivalentes. La différence tient au choix des plans passant par le point.

7. Des équations donnant le point $\bar{x}$, soit de l'expression du point R^1, on déduit les équations locales de la droite r^1. On a

$$\frac{z^2}{2aM + K_2 N} = \frac{z^3}{2bN + H_2 M} = \frac{z^4}{H_2 K_2 - 4ab}. \qquad (r^1)$$

En partant de l'expression de R^2, on trouve, pour équations locales de la droite r^2,

$$(H_2K_2 - 4ab)\ z^1 + (2bN - H_2M)\ z^2 + (2aM - K_2N)\ z^3 = 0,$$
$$z^4 = 0. \tag{r^2}$$

Les équations des directrices de Wilczynski w^1, w^2 de la surface (x) sont comme on sait

$$z^2 = z^3 = 0, (w^1)\ ; \quad z^1 = z^4 = 0, (w^2).$$

Celles des directrices de Wilczynski de la surface $(\bar{x})$ sont

$$\left.\begin{aligned} &bNz^1 - (bHN - aKM)\ z^3 - a\alpha Mz^4 = 0, \\ &aMz^1 - (aKM - bHN)\ z^2 - b\beta Nz^4 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\overline{W}^1)$$

$$\left.\begin{aligned} &(bHN - aKM)\ z^1 - a\alpha Mz^2 - b\beta Nz^3 = 0, \\ &bNz^2 - aMz^3 + (bHN - aKM)\ z^4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\overline{W}^2)$$

8. Nous terminerons en établissant deux relations liant les invariants des équations de Laplace de la suite L.

Posons $\qquad A = \alpha + K^2, \quad B = \beta + H^2,$

d'où $\qquad \Omega\ (V^2, V^2) = 2A\Delta, \quad \Omega\ (U^2, U^2) = -2B\Delta.$

En dérivant la première relation par rapport à u, on a

$$2\Omega\ [V^3 + V^2\ (\log ak_1\ k_2)_u,\ V^2] = 2A_uA$$

et comme $\Omega\ (V^3,\ V^2) = 0$,

$$2A\ (\log\ ak_1k_2)_u = A_u.$$

On en déduit $\qquad A = (ak_1k_2)^2\ \psi_1(v),$

$\psi_1(v)$ étant une fonction de v seul.

On obtient de même, en dérivant la seconde relation par rapport à v,

$$B = (bh_1h_2)^2\ \psi_2(u),$$

$\psi_2(u)$ étant une fonction de u seul.

On peut d'ailleurs changer les paramètres u, v des asymptotiques pour avoir $\psi_1(v) = 1$, $\psi_2(u) = 1$. On a alors la relation

$$(bh_1h_2)^2\ bN = (ak_1k_2)^2\ aM.$$

Liége, le 17 janvier 1964.