Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Détermination de relations entre les invariants des points d'une suite de Laplace périodique associée à une surface.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques

(première note)

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination de relations entre les invariants des points d'une suite de Laplace périodique associée à une surface.

Dans un mémoire récent [1], nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une surface associée à une suite de Laplace périodique de l'espace à cinq dimensions, la suite ayant la période $2n + 2$ ($n \geqslant 2$). Dans un travail en cours de publication dans l'*Archiv der Mathematik*, nous avons établi plusieurs propriétés de la suite de Laplace considérée. Dans cette note, nous nous proposons d'établir diverses propriétés des invariants relatifs des points de la suite de Laplace.

Nous avons établi, dans une note déjà ancienne [2], la relation linéaire qui lie sept points consécutifs de la suite de Laplace L associée à une surface. Dans le cas où cette suite est périodique, cette relation peut être obtenue de deux manières différentes et l'identification de ces deux relations équivalentes permet d'obtenir les relations cherchées.

Nous supposerons $n > 3$, les cas $n = 2$ et $n = 3$ ayant déjà été considérés [3].

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v et

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

la suite L, autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q de Klein dans l'espace S_5, qui lui est associée, chaque point étant le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés de cette suite lorsqu'elle a la période $2n+2 (n>3)$.

Nous posons

$$U^{2n+2} = \lambda U, \quad V^{2n+2} = \mu V$$

et nous avons

$$\lambda_u = 0,\ (\log \lambda)_v = (\log ab h_1 \ldots h_{2n+1})_v,$$

$$\mu_v = 0,\ (\log \mu)_u = (\log ab k_1 \ldots k_{2n+1})_u,$$

les h et les k étant les invariants relatifs des équations de Laplace auxquelles satisfont les points de la suite L.

Nous avons

$$h_{n-i+1} = k_{n+i+1}$$

et ensuite

$$\lambda V^i + 2a k_1 \ldots k_i U^{2n+1-i} = 0,$$

$$\mu U^i + 2b h_1 \ldots h_i V^{2n+1-i} = 0.$$

En outre, on a

$$\lambda\mu = 4ab h_1 \ldots h_{n+1} k_1 \ldots k_n = 4ab h_1 \ldots h_n k_1 \ldots k_{n+1}.$$

Les points U^n et V^n appartiennent à l'hyperquadrique Q et représentent les tangentes aux asymptotiques v, u d'une surface $(\bar{x})$.

2. Nous poserons pour abréger

$$H^n = \log b h_1 \ldots h_n,\ K^n = \log a k_1 \ldots k_n,$$

$$\overline{H}^n = \log b^{n+1} h_1^n \ldots h_{n-1}^2 h_n,$$

$$\overline{K}^n = \log a^{n+1} k_1^n \ldots k_{n-1}^2 k_n$$

et ensuite

$$\Phi^n = \overline{H}^n - \overline{K}^{n-3},\ \Psi^n = \overline{K}^n - \overline{H}^{n-3}.$$

Observons que l'on a

$$\overline{H}^n = H^n + \overline{H}^{n-1},\ \overline{K}^n = K^n + \overline{K}^{n-1}$$

et

$$(\log \lambda)_v = \mathrm{H}_v^{n-1} + \mathrm{K}_v^n, \quad (\log \mu)_u = \mathrm{K}_u^{n+1} + \mathrm{H}_u^n.$$

3. Dans la note citée plus haut, nous avons établi les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{U}^{m+6} + \Phi_v^{m+5}\mathrm{U}^{m+5} + \beta^{m+4}\mathrm{U}^{m+4} + \delta^{m+3}\mathrm{U}^{m+3} \\ &- \frac{ak_1 \dots k_{m+3}}{bh_1 \dots h_{m+2}}[\alpha^{m+3}\mathrm{U}^{m+2} - h_{m+2}\Psi_u^{m+3}\mathrm{U}^{m+1} + h_{m+1}h_{m+2}\mathrm{U}^m] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{V}^{m+6} + \Psi_u^{m+5}\mathrm{V}^{m+5} + \alpha^{m+4}\mathrm{V}^{m+4} + \gamma^{m+3}\mathrm{V}^{m+3} \\ &- \frac{bh_1 \dots h_{m+3}}{ak_1 \dots k_{m+2}}[\beta^{m+3}\mathrm{V}^{m+2} - k_{m+2}\Phi_v^{m+3}\mathrm{V}^{m+1} + k_{m+1}k_{m+2}\mathrm{V}^m] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

où nous avons posé

$$\alpha^m = \alpha^{m-1} + \Psi_{uw}^m + \Psi_u^m(\mathrm{K}_w^m - \mathrm{H}_u^{m-2}),$$
$$\beta^m = \beta^{m-1} + \Phi_{vv}^m + \Phi_v^m(\mathrm{H}_v^m - \mathrm{K}_v^{m-2}).$$

Nous avons également établi les formules donnant δ^m et γ^m ; elles sont assez compliquées et nous ne les donnerons pas ici.

Dans les relations (1) et (2), on suppose m positif. Dans la note citée, nous avons également établi les formules pour $m = -1$, $m = -2$. Pour ces valeurs, les points U et V interviennent dans les formules et les notations k_{m+1}, k_{m+2}, h_{m+1}, h_{m+2} n'ont plus de sens.

4. Si, dans la relation (1), nous posons $m = n - 2$, nous obtenons une relation entre les points U^{n+4}, U^{n+3}, ..., U^{n-2}, c'est-à-dire une relation entre les points V^{n-3}, V^{n-2}, V^{n-1}, V^n, U^n, U^{n-1}, U^{n-2}. Si d'autre part, dans la relation (2), on pose $m = n - 3$, nous obtenons une relation entre V^{n+3}, V^{n+2}, ..., V^{n-3}, c'est-à-dire entre les points U^{n-2}, U^{n-1}, U^n, V^n, V^{n-1}, V^{n-2}, V^{n-3}. Cette relation doit être identique à la précédente.

En posant $m = n - 2$ dans la relation (1), on a

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{U}^{n+4} + \Phi_v^{n+3}\mathrm{U}^{n+3} + \beta^{n+2}\mathrm{U}^{n+2} + \delta^{n+1}\mathrm{U}^{n+1} \\ &- \frac{ak_1 \dots k_{n+1}}{bh_1 \dots h_n}[\alpha^{n+1}\mathrm{U}^n - h_n\Psi_n^{n+1}\mathrm{U}^{n+1} + h_{n-1}h_n\mathrm{U}^{n-2}] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2bh_1 \dots h_{n+2}}{\mu}[h_{n+3}h_{n+4}V^{n+3} + h_{n+3}\Phi_v^{n+3}V^{n+2} + \beta^{n+2}V^{n+1}]\\&-\delta^{n+1}U^{n+1}\\&+\frac{ak_1 \dots k_{n+1}}{bh_1 \dots h_n}[\alpha^{n+1}U^n - h_n\Psi_u^{n+1}U^{n-1} + h_{n-1}h_nU^{n-2}] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

En posant $m = n - 3$ dans la relation (2), on a

$$\left.\begin{aligned}&V^{n+3} + \Psi_u^{n+2}V^{n+2} + \alpha^{n+1}V^{n+1} + \gamma^n V^n\\&-\frac{bh_1 \dots h_n}{ak_1 \dots k_{n-1}}[\beta^n V^{n-1} - k_{n-1}\Phi_v^n V^{n-2} + k_{n-2}k_{n-1}V^{n-3}] = 0,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2ak_1 \dots k_{n+1}}{\lambda}[k_{n+2}k_{n+3}U^{n+2} + k_{n+2}\Psi_u^{n+2}U^{n+1} + \alpha^{n+1}U^n]\\&-\gamma^n V^n\\&+\frac{bh_1 \dots h_n}{ak_1 \dots k_{n-1}}[\beta^n V^{n-1} - k_{n-1}\Phi_v^n V^{n-2} + k_{n-2}k_{n-1}V^{n-3}] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

En identifiant les relations (4) et (6), il vient

$$\Phi_v^{n+3} + \Phi_v^n = 0, \qquad (7)$$

$$\Psi_u^{n+2} + \Psi_u^{n+1} = 0, \qquad (8)$$

$$\beta^{n+2} = \beta^n, \qquad (9)$$

$$ak_1 \dots k_n\gamma^n + bh_1 \dots h_n\delta^{n+1} = 0. \qquad (10)$$

5. En posant de même $m = n - 3$ dans la relation (1) et $m = n - 2$ dans la relation (2), on obtient deux relations qui doivent être identiques. On a précisément

$$\left.\begin{aligned}&U^{n+3} + \Phi_v^{n+2}U^{n+2} + \beta^{n+1}U^{n+1} + \delta^n U^n\\&-\frac{ak_1 \dots k_n}{bh_1 \dots h_{n-1}}[\alpha^n U^{n-1} - h_{n-1}\Psi_u^n U^{n-2} + h_{n-2}h_{n-1}U^{n-3}] = 0\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2bh_1 \dots h_{n+1}}{\mu}[h_{n+2}h_{n+3}\mathrm{V}^{n-2} + h_{n+2}\Phi_v^{n+2}\mathrm{V}^{n-1} + \beta^{n+1}\mathrm{V}^n] \\ &- \delta^n \mathrm{U}^n \\ &+ \frac{ak_1 \dots k_n}{bh_1 \dots h_{n-1}}[\alpha^n \mathrm{U}^{n-1} - h_{n-1}\Psi_u^n \mathrm{U}^{n-2} + h_{n-2}h_{n-1}\mathrm{U}^{n-3}] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{V}^{n+4} + \Psi_u^{n+3}\mathrm{V}^{n+3} + \alpha^{n+2}\mathrm{V}^{n+2} + \gamma^{n+1}\mathrm{V}^{n+1} \\ &- \frac{bh_1 \dots h_{n+1}}{2h_1 \dots k_n}[\beta^{n+1}\mathrm{V}^n - k_n\Phi_v^{n+1}\mathrm{V}^{n-1} + k_{n-1}k_n\mathrm{V}^{n-2}] = 0,\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2ak_1 \dots k_{n+2}}{\lambda}[k_{n+3}k_{n+4}\mathrm{U}^{n-3} + k_{n+1}\Psi_u^{n+3}\mathrm{U}^{n-2} + \alpha^{n+2}\mathrm{U}^{n-1}] \\ &- \gamma^{n+1}\mathrm{V}^{n+1} \\ &+ \frac{bh_1 \dots h_{n+1}}{ak_1 \dots k_n}[\beta^{n+1}\mathrm{V}^n - k_n\Phi_v^{n+1}\mathrm{V}^{n-1} + k_{n-1}k_n\mathrm{V}^{n-2}] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

En identifiant les relations (12) et (14). on obtient

$$\Psi_u^{n+3} + \Psi_u^n = 0, \tag{15}$$

$$\Phi_v^{n+2} + \Phi_v^{n+1} = 0, \tag{16}$$

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n, \tag{17}$$

$$ak_1 \dots k_n\gamma^{n+1} + bh_1 \dots h_n\delta^n = 0. \tag{18}$$

6. Les relations (7) et (16) ne sont pas indépendantes. La première s'écrit

$$\mathrm{H}_v^{n+3} + \overline{\mathrm{H}}_v^{n+2} - \mathrm{K}_v^n - \overline{\mathrm{K}}_v^{n-1} + \overline{\mathrm{H}}_v^n - \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3} = 0$$

et la seconde

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n+2} - \overline{\mathrm{K}}_v^{n-1} + \mathrm{H}_v^{n+1} + \overline{\mathrm{H}}_v^n - \mathrm{K}_v^{n-2} - \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3} = 0.$$

En soustrayant membre à membre la seconde de la première, on a

$$\mathrm{H}_v^{n+3} - \mathrm{H}_v^{n+1} - \mathrm{K}_v^n + \mathrm{K}_v^{n-2} = 0.$$

c'est-à-dire

$$(\log h_{n+2}h_{n+3})_v = (\log k_{n-1}k_n)_v,$$

ce qui est une identité puisque

$$h_{n+2} = k_n,\ h_{n+3} = k_{n-1}.$$

De même, les relations (8) et (15) ne sont pas indépendantes.

On a d'autre part

$$\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \Phi^{n+2}_{vv} + \Phi^{n+2}_v(\mathrm{H}^{n+2}_v - \mathrm{K}^n_v),$$

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \Phi^{n+1}_{vv} + \Phi^{n+1}_v(\mathrm{H}^{n+1}_v - \mathrm{K}^{n-1}_v).$$

Puisque $h_{n+2} = k_n$, on a

$$\mathrm{H}^{n+2}_v - \mathrm{K}^n_v = \mathrm{H}^{n+1}_v - \mathrm{K}^{n-1}_v$$

d'où, en vertu de la relation (16), par addition des deux relations précédentes,

$$\beta^{n+2} = \beta^n.$$

On démontre de même que l'on a

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n.$$

7. On peut observer qu'en faisant $m = n - 1$ dans la relation (1) et $m = n - 4$ dans la relation (2), on obtient deux relations qui doivent être identiques. Les formules obtenues par cette identification peuvent se déduire des formules (7) à (10) et (15) à (18). Par contre, si l'on dérive la relation (3) par rapport à u, on obtient une relation entre les points $\mathrm{U}^{n+3}, \ldots, \mathrm{U}^{n-3}$ qui doit être identique à la relation (11).

En observant que l'on a

$$\Phi^{n+3}_{uv} = k_{n+1} - h_{n+4}$$

et en remplaçant α^{n+1} par sa valeur, on trouve

$$k_{n+1}\mathrm{U}^{n+3} + [h_{n+3}\Phi^{n+3}_v + \beta^{n+2}_u]\,\mathrm{U}^{n+2} + [h_{n+2}\beta^{n+2} + \delta^{n+1}_u]\,\mathrm{U}^{n+1}$$

$$+ \left[h_{n+1}\delta^{n+1} - \frac{ak_1 \ldots k_{n+1}}{bh_1 \ldots h_n}\{(\mathrm{K}^{n+1} - \mathrm{H}^n)\,\alpha^{n+1} + \alpha^{n+1}_u\}\right]\mathrm{U}^n$$

$$- \frac{ak_1 \ldots k_{n+1}}{bh_1 \ldots h_{n-1}}[\alpha^n\mathrm{U}^{n-1} + h_{n-1}\Psi^n_u\mathrm{U}^{n-2} + h_{n-2}h_{n-1}\mathrm{U}^{n-3}] = 0.$$

L'identification avec la relation (11) donne

$$\left.\begin{aligned}
\beta_u^{n+2} &= h_{n+1}\Phi_v^{n+2} - h_{n+3}\Phi_v^{n+3},\\
\delta_u^{n+1} &= h_{n+1}\beta^{n+1} - h_{n+2}\beta^{n+2},\\
\delta^{n+1} - \delta^n &= \frac{ak_1 \dots k_n}{bh_1 \dots h_n}\left[(\mathrm{K}_u^{n+1} - \mathrm{H}_u^n)\,\alpha^{n+1} + \alpha_u^{n+1}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

En dérivant de même la relation (13) par rapport à v et en identifiant la relation obtenue avec la relation (3), on obtient

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_v^{n+2} &= k_{n+1}\Psi_u^{n+2} - k_{n+3}\Psi_v^{n+3},\\
\gamma_v^{n+1} &= k_{n+1}\alpha^{n+1} - k_{n+2}\alpha^{n+2},\\
\gamma^{n+1} - \gamma^n &= \frac{bh_1 \dots h_n}{ak_1 \dots k_n}\left[(\mathrm{H}_v^{u+1} - \mathrm{K}_v^n)\,\beta^{n+1} + \beta_v^{n+1}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

8. Des relations (10) et (18), on déduit

$$\frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{bh_1 \dots h_n} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{ak_1 \dots k_n}.$$

En utilisant les dernières des relations (19) et (20), on en tire

$$\left.\begin{aligned}
&ak_1 \dots k_n\left[(\mathrm{K}_u^{n+1} - \mathrm{H}_u^n)\alpha^{n+1} + \alpha_u^{n+1}\right]\\
&= bh_1 \dots h_n\left[(\mathrm{H}_v^{n+1} - \mathrm{K}_v^n)\,\beta^{n+1} + \beta_v^{n+1}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

relation qui se déduit, lorsque $h_{n+1} = k_{n+1}$, d'une formule donnée dans notre note citée plus haut.

On a ensuite

$$\left.\begin{aligned}
\gamma^{n+1} - \gamma^n &= \alpha_u^{n+1} + \alpha^{n+1}\,(\mathrm{K}_u^{n+1} - \mathrm{H}_u^n),\\
\delta^{n+1} - \delta^n &= \beta_v^{n+1} + \beta^{n+1}\,(\mathrm{H}_v^{n+1} - \mathrm{K}_v^n).
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Le calcul des quantités $\gamma^n, \gamma^{n+1}, \delta^n, \delta^{n+1}$ est assez compliqué en utilisant les données précédentes. Nous reprendrons ce calcul plus tard.

Liège, le 14 juillet 1964.

BIBLIOGRAPHIE

[1] La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé (*Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique*, 1964).

[2] Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface (*Bulletin de la Société roy des Sciences de Liège*, 1934, pp. 64-67).

[3] Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1928, pp. 158-186, 345-348). Voir aussi le *mémoire* cité plus haut.