Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Nouvelle démonstration du théorème établi dans les notes précédentes, à savoir : Si les réglées asymptotiques gauches d'un mode d'une surface appartiennent à des complexes linéaires, elle est surface focale d'une congruence W telle que les asymptotiques du même mode de la seconde surface focale appartiennent à des complexes linéaires.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires (troisième note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 50, 1964. pp. 1127-1129;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1964.65088;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1964_num_50_1_65088;

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires

(troisième note)

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Nouvelle démonstration du théorème établi dans les notes précédentes, à savoir : *Si les réglées asymptotiques gauches d'un mode d'une surface appartiennent à des complexes linéaires, elle est surface focale d'une congruence W telle que les asymptotiques du même mode de la seconde surface focale appartiennent à des complexes linéaires.*

Dans les deux premières notes (1), nous avons établi le théorème dont l'énoncé est rappelé dans le résumé ci-dessus. L'objet de cette nouvelle note est d'en donner une démonstration plus simple en ce sens qu'elle fait appel à des propriétés plus immédiates. Nous utilisons, pour indiquer les dérivations et les numéros d'ordre, les notations du dernier des mémoires cités plus haut, le passage d'une notation à l'autre étant aisé.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Nous supposerons qu'elle n'est pas réglée et que ses réglées

(1) Les deux premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1963, pp. 278-285, 527-528. Voir aussi notre mémoire *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1964, pp. 1-84).

Dans notre seconde note, il y a lieu de compléter certaines formules, p. 528. ligne 5, lire

$$\Omega\,(\bar{\mathrm{U}}_1, \mathrm{J}_{-1}) = 0,\ \Omega\,(\bar{\mathrm{U}}_1^{01}, \mathrm{J}_{-1}) + \Omega\,(\bar{\mathrm{U}}_1, \mathrm{J}_{-1}^{01}) = 0,\ \Omega\,(\bar{\mathrm{U}}_1^{01}, \mathrm{J}_{-1}) = 0$$

et ligne 7, lire

$$\Omega\,(\bar{\mathrm{U}}_1, \mathrm{J}_{-1}^{01}) = 0.$$

asymptotiques gauches du mode u appartiennent à des complexes linéaires. A cette surface est attachée dans un espace à cinq dimensions une suite de Laplace L,

$$U^2, U^1, U, V, V^1, V^2, V^3, V^4 \qquad (L)$$

se terminant au point U^2 en présentant le cas de Laplace et au point V^4 en présentant le cas de Goursat. Les points U, V appartiennent à l'hyperquadrique Q de Klein et chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Dans la première note, nous avons déterminé un point $\bar{U}^1$ ne dépendant que de v et tel que la tangente à la courbe $(\bar{U}^1)$ passe par U^2.

L'hyperplan polaire ξ du point $\bar{U}^1$ par rapport à l'hyperquadrique Q coupe les droites UV, VV^1, V^1V^2,... respectivement en des points J, J^{-1}, J^{-2}, ... qui se succèdent dans une suite de Laplace, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Désignons par J^1 le transformé de Laplace de J dans le sens des v. Ce point appartient à la droite UU^1.

Soit $\bar{U}$ le point de rencontre de la droite $\bar{U}^1J^1$ avec l'hyperplan ξ. Nous allons démontrer que le point $\bar{U}$ détermine une suite de Laplace se terminant au point $\bar{U}^1$ en présentant le cas de Laplace et que la droite $\bar{U}J$ correspond à la seconde nappe focale de la congruence (j) représentée sur l'hyperquadrique Q par la surface (J), la première nappe focale étant la surface (x).

2. Lorsque u varie, la droite $\bar{U}^1\bar{U}$ décrit un cône de sommet $\bar{U}^1$, le plan tangent à ce cône le long de cette génératrice contenant la droite JJ^1 et étant par conséquent le plan $\bar{U}^1\bar{U}J$.

D'autre part, on a

$$\Omega(\bar{U}^1, \bar{U}) = 0, \qquad \Omega(\bar{U}^1, \bar{U}_u) = 0,$$

puisque $\bar{U}^1$ ne dépend pas de u.

Le point $\bar{U}_u$ appartient donc à l'hyperplan ξ et celui-ci rencontrant le plan $\bar{U}^1\bar{U}J$ suivant la droite $\bar{U}J$, le point $\bar{U}_u$ appartient à cette droite.

Supposons que le point $\bar{U}$ n'appartienne pas à l'hyperquadrique Q. Le plan tangent à la surface (J) en J contient les droites JJ^1, JJ^{-1}, $J\bar{U}$ et par suite la droite $\bar{U}J$ touche en J la surface (J) donc l'hyperquadratique Q.

Les points $\bar{U}$, J, J^{-1} appartiennent à l'hyperplan polaire ξ de $\bar{U}^1$ et cet hyperplan ne contient pas le point J^1 ; il coupe donc le plan tangent en J à la surface (J) suivant une droite qui contient les points $\bar{U}$, J et J^{-1}. Il en résulte que la droite $\bar{U}\bar{U}_u$ passe par J^{-1} et que la droite $J^{-1}\,J_v^{-1}$ passe par J donc par $\bar{U}$. Mais alors, les points $\bar{U}$ et J^{-1} sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Or J est le transformé de Laplace de J^{-1} et par conséquent $\bar{U}$ doit coïncider avec J. Il est donc absurde de supposer que $\bar{U}$ n'appartient pas à l'hyperquadrique Q. Cela étant, la droite $\bar{U}J$ touchant Q en J, appartient tout entière à Q.

3. La droite $\bar{U}J$ représente un faisceau de rayons contenant la droite j dont J est l'image et le point $\bar{x}$, centre de ce faisceau de rayons, est donc un foyer de la droite j. La surface focale $(\bar{x})$ a pour asymptotique u et v puisque (j) est une congruence W. La tangente $\bar{x}\bar{x}_u$ à la ligne u est représentée par le point $\bar{U}$ et la tangente $\bar{x}\bar{x}_v$ par un point $\bar{V}$ de la droite $\bar{U}J$. Les points $\bar{U}$, $\bar{V}$ déterminent une suite de Laplace $\bar{L}$.

La tangente à la courbe v au point $\bar{U}$ doit passer par J^1 et elle passe par conséquent par le point $\bar{U}^1$. On voit donc que la suite $\bar{L}$ s'arrête au point $\bar{U}^1$ en présentant le cas de Laplace.

La congruence (j) est donc une congruence W dont une surface focale (x) a ses réglées asymptotiques gauches du mode u appartenant à des complexes linéaires et dont la seconde surface focale $(\bar{x})$ a ses asymptotiques du mode u appartenant à des complexes linéaires, ce qu'il fallait établir.

Liége, le 2 novembre 1964.