Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Formation de nouvelles relations entre les invariants et les catactères de la suite. Correspondance entre les plans osculateurs des courbes tracées sur les deux surfaces.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Recherches sur les surfaces associées à une suite de Laplace périodique

(troisième note)

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Formation de nouvelles relations entre les invariants et les catactères de la suite. Correspondance entre les plans osculateurs des courbes tracées sur les deux surfaces.

Dans les deux premières notes, nous avons obtenu des relations entre les invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont les points de la suite de Laplace [1]. Celle-ci est associées à deux surfaces (x), $(\bar{x})$ et nous avons, changeant de notations, formé la suite de Laplace en partant de la surface $(\bar{x})$. Nous poursuivons cette étude, ce qui nous donne de nouvelles relations. Nous formons ensuite les équations de la correspondance birationnelle qui lie les plans osculateurs des courbes homologues en deux points correspondants des surfaces (x), $(\bar{x})$. Cette correspondance est du troisième ordre, comme dans le cas général des correspondances asymptotiques entre deux surfaces.

1. Dans la seconde note, nous avons posé

$$U^n = B_u\bar{V}, \quad V^n = A_u\bar{U},$$

[1] Les deux premières notes ont paru dans ce Bulletin, 1964, pp. 842-849 et 920-925.

d'où

$$\bar{U}_u + 2\bar{b}\bar{V} = 0, \; \bar{V}_v + 2\bar{a}\bar{U} = 0,$$

où l'on a

$$\mu\bar{a} = A_{n+1}, \; \lambda\bar{b} = B_{n+1},$$

En désignant par $\bar{U}^1$, $\bar{U}^2$, ... les transformés successifs de $\bar{U}$ dans le sens des v et par $\bar{V}^1$, $\bar{V}^2$, ... ceux de $\bar{V}$ dans le sens des u, on a

$$U^{n-1} = B_{n-1}\bar{V}^1, \qquad V^{n-1} = A_{n-1}\bar{U}^1,$$

$$U^{n-2} = B_{n-2}\bar{V}^2, \qquad V^{n-2} = A_{n-2}\bar{U}^2.$$

Remarquons que l'on a

$$\bar{V}^i = \bar{V}^{i+1} + \bar{V}^i[K_u^{n+i+1} - (\log\mu)_u]$$

$$= \bar{V}^{i+1} - \bar{V}^i H_u^{n-i}$$

Supposons que l'on ait

$$U^{n-i} = B_{n-i}\bar{V}^i.$$

En dérivant par rapport à u, on en déduit

$$U^{n-i-1} = B_{n-i-1}\bar{V}^i.$$

On peut donc écrire

$$U^{n-i} = B_{n-i}\bar{V}^i, \; V^{n-i} = A_{n-i}\bar{U}^i.$$

2. Portons ces valeurs dans la relation (4) et dans la relation (12) de la première note. Nous obtenons

$$2\,B_n[\bar{U}^3 + \Phi_v^{n+3}\bar{U}^2 + \beta^{n+2}\bar{U}^1 + \delta^{n+1}\bar{U}]$$

$$+ \mu[\alpha^{n+1}\bar{V} - \Psi_u^{n+1}\bar{V}^1 + \bar{V}^2] = 0, \tag{1}$$

$$2\,A_n[\bar{V}^3 + \Psi_u^{n+3}\bar{V}^2 + \alpha^{n+2}\bar{V}^1 + \gamma^{n+1}\bar{V}]$$

$$+ \lambda[\beta^{n+1}\bar{U} - \Phi_v^{n+1}\bar{U}^1 + \bar{U}^2] = 0. \tag{2}$$

En opérant sur $\bar{U}$ et $\bar{V}$ comme sur U et V et en affectant d'une barre supérieure les quantités correspondantes, nous avons

$$2\,\bar{U}^3 + 2\bar{U}^2(\log\bar{b}^3\bar{h}_1^2\bar{h}_2)_v + 2\bar{\beta}_1\bar{U}^1 + \bar{\beta}(\log\bar{b}^2\bar{\beta})_1\bar{U}$$

$$+ 4\bar{a}[\bar{\alpha}\bar{V} + \bar{V}^1(\log\bar{a}\bar{k}_1)_u + \bar{V}^2] = 0, \tag{3}$$

$$2\,\bar{V}^3 + 2\bar{V}^2(\log \bar{a}^3\bar{k}_1^2\bar{k}_2)_u + 2\bar{\alpha}_1\bar{V}^1 + \bar{\alpha}(\log \bar{a}^2\bar{\alpha})_u\bar{V}$$
$$+ 4\bar{b}[\bar{\beta}\bar{C} + \bar{U}^1(\log \bar{b}\bar{h}_1)_v + \bar{C}^2] = 0. \qquad (4)$$

Les équations (1) et (3) d'une part, de même que les relations (2) et (4), doivent être identiques.

3. Nous avons

$$\bar{h}_1 = k_n, \quad \bar{h}_2 = k_{n-1}, \quad \bar{k}_1 = h_n, \quad \bar{k}_2 = h_{n-1},$$

donc

$$(\log \bar{b}^3\bar{b}_1^2\bar{h}_2)_v = -3K_v^n + (\log k_n^2k_{n-1})_v,$$
$$(\log \bar{a}\bar{k}_1^2\bar{k}_2)_u = -3\,H_u^n + (\log h_n^2h_{n-1}) = 0,$$
$$(\log \bar{b}\bar{h}_1)_v = -K_v^{n-1},$$
$$(\log \bar{a}\bar{k}_{1u} = -H_u^{n-1},$$

en utilisant les relations

$$(\log \lambda)_v = H_v^{n+1} + K_v^n, \quad (\log \mu)_u = K_u^{n+1} + H_u^n.$$

L'identification des équations (1) et (3) donne

$$\Phi_v^{n+3} = (\log \bar{b}^3\bar{h}_1^2\bar{h}_2)_v, \quad \Psi_u^{n+1} + (\log \bar{a}\bar{k}_1)_u = 0$$

et celle des équations (2) et (4),

$$\Psi_u^{n+3} = (\log \bar{a}\bar{k}_1^2\bar{k}_2)_u, \quad \Phi_v^{n+1} + (\log \bar{b}\bar{h}_1)_v = 0$$

De la première relation on déduit

$$\bar{H}_v^{n+1} + 2H_v^{n+1} = \bar{K}_v^{n-1} - 2K_v^n$$

et de même de la troisième,

$$\bar{K}_u^{n+1} + 2K_u^{n+1} = H_u^{n+1} - 2H_u^n.$$

La seconde relation donne

$$\bar{K}_u^{n+1} = \bar{H}_u^{n-1} \qquad (7)$$

et la quatrième

$$\bar{H}_v^{n+1} = \bar{K}_v^{n-1}. \qquad (8)$$

La relation (11) de la première note s'écrit

$$\bar{H}_v^{n+2} - \bar{K}_v^{n-1} + \bar{H}_v^{n+1} - \bar{K}_v^{n-2} = 0$$

et donne donc

$$\overline{\mathrm{H}}_u^{n+2} = \overline{\mathrm{K}}_u^{n-2}. \tag{9}$$

On a de même

$$\overline{\mathrm{K}}_u^{n+2} = \overline{\mathrm{H}}_u^{n-2}. \tag{10}$$

La relation (7) de la première note donne

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n+3} - \overline{\mathrm{K}}_v^{n} + \overline{\mathrm{H}}_v^{n} - \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3} = 0.$$

Or, dans la seconde note, nous avons obtenu $\overline{\mathrm{H}}^n = \overline{\mathrm{K}}^n$, donc

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n+3} = \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3} \tag{11}$$

On a de même

$$\overline{\mathrm{K}}_v^{n+3} = \overline{\mathrm{H}}_v^{n-3}. \tag{12}$$

Observons que nous avons par exemple

$$h_{n+2} = -\overline{\mathrm{H}}_{uv}^{n+1} + 4ab, \quad k_n = -\overline{\mathrm{K}}_{uv}^{n-1} + 4ab$$

d'où, puisque $h_{n+2} = k_n$,

$$\overline{\mathrm{H}}_{uv}^{n+1} = \overline{\mathrm{K}}_{uv}^{n-1}.$$

On déduit cette relation de la relation (8) en dérivant celle-ci par rapport à u. Mais la relation (8) ne peut se déduire de la précédente puisque la constante d'intégration est égale à l'unité.

On peut faire la même observation pour les relations (7), (9), (10), (11) et (12).

4. Partons de la relation (9) et observons que l'on peut l'écrire

$$\mathrm{H}_v^{n+1} + \overline{\mathrm{H}}_v^{n} = \overline{\mathrm{K}}_v^{n-1}.$$

On a

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n} = \overline{\mathrm{K}}_v^{n} = \mathrm{K}_v^{n} + \overline{\mathrm{K}}_v^{n-1}$$

et par suite

$$\mathrm{H}_v^{n+2} + \mathrm{K}_v^{n} = 0.$$

On a donc

$$(\log \lambda)_v = \mathrm{H}_v^{n+1} + \mathrm{K}_v^{n} = 0,$$

donc $\lambda_v = 0$ et comme on a $\lambda_u = 0$, λ est une constante.

On démontre de même que μ est une constante.

5. L'identification des relations (4) et (3) donne

$$\bar{\beta}_1 = \beta^{n+2}, \quad \bar{\alpha} = \alpha^{n+1},$$

$$2\delta^{n+1} = \bar{\beta}\,(\log \bar{b}^2\bar{\beta})_v$$

et l'identification des relations (2) et (4) donne

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha^{n+2}, \quad \bar{\beta} = \beta^{n+1}$$

$$2\gamma^{n+1} = \bar{a}(\log \bar{\alpha}^2\bar{\alpha})_u.$$

On en déduit

$$2\delta^{n+1} = 2\beta^{n+1}H_v^{n+1} + \beta_v^{n+1}$$

et

$$2\gamma^{n+1} = 2\alpha^{n+1}K_u^{n+1} + \alpha_u^{n+1}$$

On a ensuite, par les relations (10) et (18) de la première note,

$$2A_n\gamma^n + B_n[2\beta^{n+1}H_v^{n+1} + \beta_v^{n+1}] = 0,$$

$$2B_n\delta^n + A_n[2\alpha^{n+1}K_u^{n+1} + \alpha_u^{n+1}] = 0$$

Observons que l'on a

$$a\alpha_u + 2\alpha a_u = b\beta_v + 2\beta b_v$$

et par conséquent

$$\bar{a}\bar{\alpha}_u + 2\bar{\alpha}\bar{a}_u = \bar{b}\bar{\beta}_v + 2\bar{\beta}\bar{b}_v.$$

On en déduit

$$\lambda A_{+n1}\gamma^{n+1} = \mu B_{n+1}\delta^{n+1}$$

On peut donc écrire, en reprenant les relations (10) et (18) de la première note,

$$\frac{\gamma^{n+1}}{\mu B_n} = \frac{\gamma^n}{-\lambda B_v} = \frac{\delta^n}{-\mu A_v} = \frac{\delta^{n+1}}{\lambda A_v},$$

puisque $h_{n+1} = k_{n+1}$.

6. Nous nous occuperons maintenant des relations qui existent entre les plans oculateurs aux courbes u, v en des points homologues x, x des surfaces (x), (x).

Le plan osfulateur en un point x à une courbe tracée sur la surface (x) doit passer par les points

$$x, \quad mdu + ndv,$$

$$m[2adv^2 - (\log b)_v dudv - d^2u] + n[2bdu^2 - (\log a)_u dudv - d^2v] - ydudv.$$

Son équation locale est donc

$$z^2dudv^2 - z^3du^2dv$$
$$+ z[dud^2v - dvd^2 - 2bdu^3 + (\log a)_v du^2dv -$$
$$(\log d)_v d_u d^2{}_v + 2adv^3] = 0.$$

Nous désignerons par ζ_2, ξ_3, ζ_4 ses coordonnées tangentielles.

Le plan osculateur à la courbe homologue sur la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$ a une équation analogue, où l'on affecte d'une barre supérieure les quantités intervenant dans cette équation. On désignera par $\bar{x}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{y}$ les sommets du tétraèdre de Cartan attaché à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$ de sorte qu'un point de l'espace est donné par

$$\bar{x}\bar{z}^1 + \bar{m}\bar{z}^2 + \bar{n}\bar{z}^3 + \bar{y}\bar{z}^4,$$

et on posera $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$. Enfin, on désignera par $\bar{\zeta}_2$, $\bar{\zeta}_3$, $\bar{\zeta}_4$ les coordonnées tangentielles du plan osfulateur.

Nous avons

$$\rho\zeta_2 = dudv^2, \ \beta\zeta_3 = -du^2dv,$$
$$\rho\zeta_4 = dud^2v - dvd^2u - 2bdu^3 + (\log a)_u du^2dv -$$
$$(\log b)_v duda^2 + 2adv^3$$

Posons $du = -t\zeta_3$, $dv = t\zeta_2$, d'où

$$\rho\zeta_4 = dudv^2 - dvd^2u + t^3[2b\zeta_3^3 + (\log a)_u \zeta_2\zeta_3^2 + (\log b)_v \zeta_2^2\zeta_3 + 2a\zeta_2^3].$$

On a de même

$$\rho_1\bar{\zeta}_4 = dud^2v - dvd^2u + t^3[2\bar{b}\xi_3^2 + \ldots + 2a\zeta_2^3]$$

On en déduit

$$\rho_1\bar{\zeta}_2 = \zeta_2^2\zeta_3, \ \rho_1\bar{\zeta}_3 = \zeta_2\zeta_3^2,$$
$$\rho_1\bar{\zeta}_4 = \zeta_2\zeta_3\zeta_4 + 2(b - \bar{b})\zeta_3^3 - \left(\log\frac{\bar{a}}{a}\right)_u \zeta_2\zeta_3^2 - \left(\log\frac{\bar{b}}{b}\right)_v \zeta_2^2\zeta_3 + 2(a - \bar{a})\zeta_2^3.$$

La correspondance entre les plans osculateurs est donc du troisième ordre.

Liège, le 17 octobre 1964.