Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques (deuxième note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Formation des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait le point x^{-} de la seconde surface (x^{-}) associée à une suite de Laplace de période 2n + 2 associée à une surface (x).

Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques

(deuxième note)

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie.

Résumé. — Formation des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait le point $\bar{x}$ de la seconde surface $(\bar{x})$ associée à une suite de Laplace de période $2n + 2$ associée à une surface (x).

Nous poursuivons dans cette note nos recherches sur les couples de surfaces (x), $(\bar{x})$ liées à une suite de Laplace L de période $2n + 2$ (1). Les coordonnées du point x satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable de Wilczynski. Nous formons le système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait le point $\bar{x}$ de la seconde surface $(\bar{x})$. Nous obtenons ensuite une nouvelle relation entre les invariants relatifs des équations de Laplace auxquelles satisfont les différents points de la suite L.

1. Nous avons

$$\mu U^{n+1} + 2bh_1 \ldots h_{n+1} V^n = 0, \quad \lambda V^{n+1} + 2ak_1 \ldots k_{n+1} U^n = 0.$$

Posons

$$U^n = \varphi \bar{V}, \; V^n = \psi \bar{U}$$

et disposons de φ et ψ pour que $\bar{U}_u$ coïncide avec $\bar{V}$ et V_v avec $\bar{U}$. Nous avons

$$U^n_v = U^{n+1} + H^n_v U^n = H^n_v U^n - \frac{2bh_1 \ldots h_{n+1}}{\mu} V^n,$$

(1) La première note est parue dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, séance du 25 juillet 1964, pp. 860-868.

c'est-à-dire

$$\varphi\overline{\mathrm{V}}_v = [\varphi \mathrm{H}^n_v - \varphi_v]\overline{\mathrm{V}} - \frac{2bh_1 \dots h_{n+1}}{\mu}\psi\overline{\mathrm{U}}.$$

On obtient de même

$$\psi\overline{\mathrm{U}}_u = [\psi \mathrm{K}^n_u - \psi_u]\overline{\mathrm{U}} - \frac{2ak_1 \dots k_{n+1}}{\lambda}\varphi\overline{\mathrm{V}}.$$

Si nous posons

$$\varphi = bh_1 \dots h_n,\ \psi = ak_1 \dots k_n,$$

nous aurons

$$\lambda\overline{\mathrm{U}}_u + 2bh_1 \dots h_{n+1}\overline{\mathrm{V}} = 0,$$
$$\mu\overline{\mathrm{V}}_u + 2ak_1 \dots k_{n+1}\overline{\mathrm{U}} = 0.$$

Les points $\overline{\mathrm{U}}$ et $\overline{\mathrm{V}}$ satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$\overline{\mathrm{U}}_{uv} - [\mathrm{H}^{n+1}_v - (\log \lambda)_v]\overline{\mathrm{U}}_u - h_{n+1}\overline{\mathrm{U}} = 0,$$
$$\overline{\mathrm{V}}_{uv} - [\mathrm{K}^{n+1}_u - (\log \mu)_u]\overline{\mathrm{V}}_v - k_{n+1}\overline{\mathrm{V}} = 0.$$

Observons que l'on a

$$(\log \lambda)_v = \mathrm{H}^{n+1}_v + \mathrm{K}^n_v,\ (\log \mu)_u = \mathrm{K}^{n+1}_u + \mathrm{H}^n_u.$$

Les équations précédentes s'écrivent

$$\overline{\mathrm{U}}_{uv} + \mathrm{K}^n_v\overline{\mathrm{U}}_u - h_{n+1}\overline{\mathrm{U}} = 0,$$
$$\overline{\mathrm{V}}_{uv} + \mathrm{H}^n_u\overline{\mathrm{V}}_v - k_{n+1}\overline{\mathrm{V}} = 0.$$

2. Le point $\bar{x}$, satisfait à un système complétement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$\bar{x}_{uu} + 2\bar{b}\bar{x}_v + \bar{c}'\bar{x} = 0,$$
$$\bar{x}_{vv} + 2\bar{a}\bar{x}_u + \bar{c}''\bar{x} = 0,$$

où l'on a

$$\mu\bar{a} = ak_1 \dots k_{n+1},\ \lambda\bar{b} = bh_1 \dots h_{n+1}.$$

Il faut encore déterminer $\bar{c}'$ et $\bar{c}''$.

Observons que si l'on pose

$$\bar{\varDelta} = |\,\bar{x}\quad \bar{x}_u\quad \bar{x}_v\quad \bar{x}_{uv}\,|,$$

on a

$$\bar{\Delta}_u = 0, \quad \bar{\Delta}_v = 0$$

et le déterminant $\bar{\Delta}$ est une constante.

Nous poserons en abrégé

$$\mathrm{A}_i = ak_1k_2 \dots k_i, \ \mathrm{B}_i = bh_1h_2 \dots h_i.$$

3. Le transformé de $\bar{\mathrm{U}}$ de Laplace dans le sens des v est

$$\bar{\mathrm{U}}^1 = \bar{\mathrm{U}}_v - \bar{\mathrm{U}}[\mathrm{H}_v^{n+1} - (\log \lambda)_v] = \bar{\mathrm{U}}_v + \mathrm{K}_v^n\bar{\mathrm{U}}.$$

De $\mathrm{V}^n = \mathrm{A}_n\bar{\mathrm{U}}$, on déduit

$$\mathrm{V}_v^n = \mathrm{K}_u \mathrm{V}^{n-1} = \mathrm{A}_n[\mathrm{K}_v^n \bar{\mathrm{U}} + \bar{\mathrm{U}}_v])$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{V}^{n-1} = \mathrm{A}_{n-1}\bar{\mathrm{U}}^n.$$

Nous avons

$$\Omega(\bar{\mathrm{U}}^1, \bar{\mathrm{U}}^1) = -2\bar{\Delta},$$

d'où

$$\Omega(\mathrm{V}^{n-1}, \mathrm{V}^{n-1}) = -2\mathrm{A}_{n-1}^2\bar{\Delta}.$$

Le transformé de Laplace de $\bar{\mathrm{V}}$ dans le sens des u est

$$\bar{\mathrm{V}}^1 = \bar{\mathrm{V}}_u + \mathrm{H}_u^n\bar{\mathrm{V}}.$$

Comme on a

$$\mathrm{U}^{n-1} = \mathrm{B}_{n-1}\bar{\mathrm{V}}^1$$

et

$$\Omega(\bar{\mathrm{V}}^1, \bar{\mathrm{V}}^1) = 2\bar{\Delta},$$

il vient

$$\Omega(\mathrm{U}^{n-1},, \mathrm{U}^{n-1}) = 2\mathrm{B}_{n-1}^2\bar{\Delta}.$$

Nous avons

$$\bar{\mathrm{U}}^2 = \bar{\mathrm{U}}_v^1 - \bar{\mathrm{U}}^1[\mathrm{H}_v^{n+2} - (\log \lambda)_v] = \bar{\mathrm{U}}_v^1 - \bar{\mathrm{U}}^1\mathrm{K}_v^{n-1},$$

d'où

$$\mathrm{V}^{n-2} = \mathrm{A}_{n-2}\bar{\mathrm{U}}^2.$$

On calculera $\Omega(\bar{\mathrm{U}}^2, \bar{\mathrm{U}}^2)$ comme on a calculé $\Omega(\mathrm{U}^2, \mathrm{U}^2)$ mais en remplaçant a, b, c'' par $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}''$. On a

$$\bar{\beta} = 2(\log \bar{b})_{vv} + (\log \bar{b})_v^2 + 4(\bar{a}_u + \bar{c}'')$$

d'où

$$\bar{\beta} = 2[\mathrm{H}_{vv}^{n+1} - (\log \lambda)_{vv}] + [\mathrm{H}_v^{n+1} - (\log \lambda)_v^2]$$

$$+ 4 \frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mu} [\mathrm{K}_u^{n+1} - (\log \mu)_u] + 4\bar{c}'',$$

ou

$$\bar{\beta} = -2\mathrm{K}_{vv}^n + (\mathrm{K}_v^n)^2 - 4 \frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mu} \mathrm{H}_u^n + 4\bar{c}''.$$

On a ensuite

$$\Omega(\bar{\mathrm{U}}^2, \bar{\mathrm{U}}^2) = -2[\bar{\beta} + (\mathrm{K}_v^{n-1})^2]\bar{\varDelta}$$

et

$$\Omega(\bar{\mathrm{U}}^2, \bar{\mathrm{U}}^2) = 2\left[2\mathrm{K}_{vv}^n - (\mathrm{K}_v^n)^2 + 4 \frac{\mathrm{A}_{\mu+1}}{\mu} \mathrm{H}_u^n - 4\bar{c}'' - (\mathrm{K}_v^{n-1})^2\right] \bar{\varDelta}.$$

On aura de même

$$\mathrm{U}^{n-2} = \mathrm{B}_{n-2}\bar{\mathrm{V}}^2$$

et

$$\Omega(\bar{\mathrm{V}}^2, \bar{\mathrm{V}}^2) = 2\left[-2\mathrm{H}_{uu}^n + (\mathrm{H}_u^n)^2 - 4 \frac{\mathrm{B}_{n+1}}{\lambda} \mathrm{K}_v^n + 4\bar{c}' + (\mathrm{H}_u^{n-1})^2\right] \bar{\varDelta}.$$

4. En dérivant par rapport à v l'expression de $\Omega(\mathrm{V}^{n-1}, \mathrm{V}^{n-1})$, on a

$$k_{n-1}\Omega(\mathrm{V}^{n-1}, \mathrm{V}^{n-2}) = -2\mathrm{A}_{n-1}^2 \mathrm{K}_v^{n-2}\bar{\varDelta},$$

d'où

$$\Omega(\mathrm{V}^{n-1}, \mathrm{V}^{n-2}) = -2\mathrm{A}_{n-2}^2 k_{n-1} \mathrm{K}_v^{n-1}\bar{\varDelta}.$$

En dérivant de même par rapport à v l'expression $\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-1})$, on a

$$k_n\Omega(\mathrm{V}^{n-1}, \mathrm{V}^{n-1}) + k_{n-1}\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-2}) = 0,$$

d'où

$$\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-2}) = 2\mathrm{A}_{n-2}^2 k_{n-1} k_{n-2} \varDelta.$$

La formule (14) de notre première note donne alors

$$\beta^{n+1}\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-2}) - k_n \Phi_v^{n-1}\Omega(\mathrm{V}^{n-1}, \mathrm{V}^{n-2}) + k_{n-1}k_{n-2}\Omega(\mathrm{V}^{n-2}, \mathrm{V}^{n-2}) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Omega(\mathrm{V}^{n-2}, \mathrm{V}^{n-2}) = -2\mathrm{A}_{n-2}^2[\Phi_v^{n+1}\mathrm{K}_v^{n-1} + \beta^{n+1}]\bar{\varDelta}.$$

En remplaçant β^{n+1} par sa valeur, on a

$$\Omega(\mathrm{V}^{n-2}, \mathrm{V}^{n-2}) = 2\mathrm{A}^2_{n-2}[\beta^n + \Phi^{n-1}_{vv} + \Phi^{n-1}_v \mathrm{H}^{n-1}_v]\overline{\varDelta}.$$

On a d'autre part

$$\Omega(\mathrm{V}^{n-2}, \mathrm{V}^{n-2}) = \mathrm{A}^2_{n-2}\Omega(\overline{\mathrm{U}}^2, \overline{\mathrm{U}}^2)$$

et par conséquent

$$\beta^n + \Phi^{n-1}_{vv} + \Phi^{n-1}_v \mathrm{H}^{n-1}_v + 2\mathrm{K}^n_{vv} - (\mathrm{K}^n_v)^2 - (\mathrm{K}^{n-1}_v)^2$$
$$+ 4\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mu}\mathrm{H}^n_u - 4\bar{c}'' = 0,$$

équation qui détermine $\bar{c}''$.

5. On déterminera $\bar{c}'$ de la même manière. On a

$$\Omega(\overline{\mathrm{V}}^2, \overline{\mathrm{V}}^2) = 2\left[-2\mathrm{H}^n_{uu} + (\mathrm{H}^n_u)^2 - 4\frac{\mathrm{B}_{n-1}}{\lambda}\mathrm{K}^n_v - 4\bar{c}' + (\mathrm{H}^{n-1}_u)^2\right]\overline{\varDelta}.$$

D'autre part, on a successivement

$$\Omega(\mathrm{U}^{n-1}, \mathrm{U}^{n-2}) = 2\mathrm{B}^2_{n-2}h_{n-1}\mathrm{H}^{n-1}_u\overline{\varDelta},$$
$$\Omega(\mathrm{U}^n, \mathrm{U}^{n-2}) = -2\mathrm{B}^2_{n-2}h_{n-1}h_n\overline{\varDelta},$$

et en utilisant l'équation (6) de notre première note,

$$\Omega(\mathrm{U}^{n-2}, \mathrm{U}^{n-2}) = 2\mathrm{B}^2_{n-2}[\alpha^n + \Psi^{n-1}_{uu} + \Psi^{n-1}_u\mathrm{K}^{n-1}_u]\overline{\varDelta}$$

Comme on a

$$\Omega(\mathrm{U}^{n-2}, \mathrm{U}^{n-2}) = \mathrm{B}^2_{n-2}\Omega(\overline{\mathrm{V}}^2, \overline{\mathrm{V}}^2),$$

la valeur de $\bar{c}'$ sera déterminée par l'équation

$$\alpha^n + \Psi^{n+1}_{uu} - \Psi^{n-1}_u\mathrm{K}^{n-1}_u + \mathrm{H}^n_{uu} - (\mathrm{H}^n_u)^2 - (\mathrm{H}^{n-1}_u)^2$$
$$4\frac{\mathrm{B}_{n-1}}{\lambda}\mathrm{K}^n_v + 4\bar{c}' = 0.$$

6. En dérivant $\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-2})$ par rapport à v, on a

$$\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-3}) = 2k_{n-2}k_{n-1}k_n\mathrm{A}^2_{n-3}[(\log k_n)_v - (\log k_{n-1})_v + 3\mathrm{K}^{n-1}_v]\overline{\varDelta}.$$

La relation (4) de la première note donne

$$h_{n-1}\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-2}) + \Phi^{n-3}_v\Omega(\mathrm{V}^n, \mathrm{V}^{n-3}) = 0.$$

On en déduit

$$\Phi_v^{n+3} + (\log k_n)_v - (\log k_{n-1})_v + 3\mathrm{K}_v^{n-1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n+3} = \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3}.$$

Observons que l'on a, par la formule (7) de la première note,

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n+3} - \overline{\mathrm{K}}_v^{n} + \overline{\mathrm{H}}_v^{n} - \overline{\mathrm{K}}_v^{n-3} = 0.$$

On a donc

$$\overline{\mathrm{H}}_v^{n} = \overline{\mathrm{K}}_v^{n}. \tag{1}$$

7. On a de même

$$\Omega(\mathrm{U}^n, \mathrm{U}^{n-3})$$

$$= -2h_{u-2}h_{n-1}h_n\mathrm{B}_{u-3}^2[(\log h_n)_u - (\log h_{n-1})_u + 3\mathrm{H}_u^{n-1}]\Delta$$

et par la relation (14),

$$k_{n+4}\Omega(\mathrm{U}^n, \mathrm{U}^{n-2}) + \Psi^{n+3}\Omega(\mathrm{U}^n, \mathrm{U}^{n-3}) = 0.$$

Cela donne successivement

$$\Psi_u^{n-3} + (\log h_n)_u - (\log h_{n-1})_u + 3\mathrm{H}_u^{n-1} = 0,$$

$$\overline{\mathrm{K}}_u^{n+3} = \overline{\mathrm{H}}_u^{n-3},$$

et par la relation (15),

$$\overline{\mathrm{H}}_u^{n} = \overline{\mathrm{K}}_u^{n}. \tag{2}$$

Des relations (1) et (2), on déduit que $\overline{\mathrm{H}}^n$ et $\overline{\mathrm{K}}^n$ ne diffèrent que par une constante, c'est-à-dire que *le rapport*

$$\frac{a^{n+1}k_1^n \ldots k_n}{b^{n+1}h_1^n \ldots h_n}$$

est une constante.

Observons que des relations (1) et (2), on déduit

$$\overline{\mathrm{H}}_{uv}^{n} = \overline{\mathrm{K}}_{uv}^{n},$$

conséquence de la relation déjà établie $h_{n+1} = k_{u+1}$.

Liège, le 25 août 1964.