Bulletin de la Classe des sciences

# Détermination des surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin

Lucien Godeaux

**Résumé**

Résumé. — Compléments à l'étude des surfaces dont les quadriques de Lie se touchent en quatre points caractéristiques pour ces quadriques.

# Détermination des surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin

par Lucien GODEAUX.

*Résumé*. — Compléments à l'étude des surfaces dont les quadriques de Lie se touchent en quatre points caractéristiques pour ces quadriques.

Nous avons étudié à plusieurs reprises les couples de surfaces $(x)$, $(\bar{x})$ ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, c'est-à-dire dont les quadriques de Lie se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune de ces quadriques. La suite de quadriques que nous avons attachée à chaque point de la surface $(x)$ ne contient que deux termes : la quadrique de Lie $\Phi$ de $(x)$ et la quadrique $\Phi^1$ qui coupe $\Phi$ suivant le quadrilatère de Demoulin. Pour notre objet, $\Phi^1$ doit être la quadrique de Lie de la surface $(\bar{x})$. Rappelons que les courbes asymptotiques $u$, $v$ se correspondent sur les deux surfaces.

L'étude des surfaces $(x)$, $(\bar{x})$ peut être attaquée de deux manières. D'une part, on peut partir de la suite de Laplace de l'espace $S_5$ attachée aux surfaces $(x)$ et $(\bar{x})$, suite qui a la période huit. C'est ce que nous avons fait dans une note parue autrefois [1]. D'autre part, on peut écrire que des huit points caractéristiques de la quadrique $\Phi^1$, quatre appartiennent à $\Phi$ (sommets du quadrilatère de Demoulin) et les quatre autres sont confondus au point $\bar{x}$. Nous avons utilisé récemment cette seconde méthode [2].

Dans cette note, nous nous proposons de confronter les résultats obtenus par les deux méthodes. Nous déterminons les coordonnées du point $\bar{x}$ en fonction des coordonnées des sommets du tétraèdre mobile de Cartan attaché au point $x$ correspondant.

Notons en particulier le résultat suivant : *Si* $x$ *et* $\bar{x}$ *sont deux points homologues de deux surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, la tangente à une asymptotique d'une des surfaces rencontre la tangente à l'asymptotique de l'autre mode de la seconde surface.*

En d'autres termes, les tangentes $xx_u$ et $\bar{x}\bar{x}_v$ se coupent en un point et il en est de même des tangents $xx_v$ et $\bar{x}\bar{x}_u$.

Pour terminer, nous construisons une homographie qui transforme en elle-même la suite de Laplace associée aux surfaces $(x)$ et $(\bar{x})$.

1. Soient $(x)$ et $(\bar{x})$ deux surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin. On sait que les lignes asymptotiques $u$, $v$ se correspondent sur les deux surfaces. A celles-ci est attachée dans l'espace à cinq dimensions $S_5$ une suite de Laplace de période huit,

$$V^4 = U^3, U^2, U^1, U, V, V^1, V^2, V^3 = U^4. \tag{L}$$

Les points U et V appartiennent à l'hyperquadrique de Klein Q et représentent les tangentes asymptotiques $xx_u$, $xx_v$ à la surface $(x)$. Les points $V^3$ et $U^3$ appartiennent également à Q et représentent les tangentes asymptotiques $\bar{x}\bar{x}_u$, $\bar{x}\bar{x}_v$ à la surface $(\bar{x})$. Les points $U^1$, $U^2$, $V^1$, $V^2$ ne peuvent appartenir à Q.

Si nous exprimons que le point $U^3$ appartient à Q et que les points $U^3$ et $U^2$ sont conjugués par rapport à Q, nous avons, avec les notations de notre récente mémoire [3], les relations

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha - 2\bar{H}_v^2(H_v^1\beta_1 + a\theta) + (\bar{H}_v^2)^2\gamma\beta + (H_v^1)^2\gamma = 0, \tag{1}$$

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha - \bar{H}_v^2(H_v^1\beta_1 + a\theta) = 0, \tag{2}$$

$$H_v^1\beta_1 + a\theta - \bar{H}_v^2\gamma\beta - (H_v^1)^2\gamma = 0, \tag{3}$$

dont l'une est d'ailleurs une conséquence des deux autres.

Nous désignerons par $\Phi$ la quadrique de Lie attachée au point $x$ et par $\Phi^1$ celle qui est attachée au point $\bar{x}$. Les quadriques $\Phi$ et $\Phi^1$ attachées à deux points homologues $x$ et $\bar{x}$ se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune de ces quadriques.

2. Attachons au point $x$ comme de coutume le tétraèdre mobile de Cartan dont les sommets sont les points d'intersection des

directrices de Wilczynski avec la quadrique de Lie $\Phi$. Par rapport à ce tétraèdre les équations des quadriques $\Phi$ et $\Phi^1$ sont

$$\Phi \equiv z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0,$$

$$\Phi^1 \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \theta(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0,$$

où

$$\theta = \frac{\beta(\log b^2\beta)_v}{2a} = \frac{\alpha(\log a^2\alpha)_u}{2b}.$$

On a

$$\Phi_u^1 + \mathrm{K}_u \Phi^1 = \frac{h_1}{a}[\beta_1 \Phi + 2a(z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4) - a\mathrm{H}_v(z_3^2 + \alpha z_4^2)] = 0 \quad (4)$$

$$\Phi_v^1 + \mathrm{H}_v \Phi^1 = \frac{k_1}{b}[\alpha_1 \Phi + 2b(z_1 z_2 - \beta z_3 z_4) - b\mathrm{K}_u(z_2^2 + \beta z_4^2)] = 0. \quad (5)$$

Pour notre objet, les quadriques (4) et (5) doivent rencontrer la quadrique $\Phi^1$ en quatre points confondus ce qui implique, comme nous l'avons montré dans la seconde note citée, les relations

$$\alpha_1^2 - 4b^2\beta = 0, \quad \beta_1^2 + 4a^2\alpha = 0. \tag{I}$$

On constate que dans ces conditions, les quadriques (4) et (5) dégénèrent en deux plans chacune. Les droites communes aux plans de chaque couple doivent passer par le point $\bar{x}$, ce qui implique

$$a\alpha_1 \mathrm{K}_u^1 = b\beta_1 \mathrm{H}_v^1. \tag{II}$$

Observons qu'en tenant compte de la seconde des conditions (I), on a

$$\mathrm{H}_v^1 \beta_1 + a\theta = 0 \tag{III}$$

que $\bar{\mathrm{H}}_v^2$ soit nul ou non.

Dans ces conditions le point $\bar{x}$ est donné par

$$\bar{x} = (\alpha_1\beta_1 + 4ab\theta)x - 2a\alpha_1 m - 2b\beta_1 n + 4aby.$$

3. Sous les conditions précédentes la relation (3) devient

$$\bar{\mathrm{H}}_v^2[\beta + (\mathrm{H}_v^1)^2] = 0.$$

On a

$$\Omega(\mathrm{U}^2, \mathrm{U}^2) = -2[\beta + (\mathrm{H}_v^1)^2]\Delta$$

et le point $\mathrm{U}^2$ ne peut appartenir à Q, par conséquent on a $\bar{\mathrm{H}}_v^2 = 0$.

Le raisonnement fait plus haut pour les points $U^3$ et $U^2$ peut être repris pour les points $V^3$ et $V^2$. On trouve

$$K_u^1\alpha_1 + b\theta = 0$$

et $\bar{K}_u^2 = 0$.

4. La relation linéaire entre les points $U^3$, $U^2$, $U^1$, $U$, $V$, $V^1$, $V^2$ ne contient pas le terme en $U^2$ dont le coefficient serait $\bar{H}_v^2$ ; elle s'écrit

$$U^3 + \beta_1 U^1 + a\theta U + 2a(\alpha V + K_u^1 V^1 + V^2) = 0. \qquad (6)$$

L'hyperplan polaire du point $U$ passe par les points $U^1$, $U$, $V$, $V^1$, $V^2$ et par conséquent on a

$$\Omega(U^3, U) = 0.$$

Cela signifie que l'hyperplan polaire du point $U$ passe par $U^3$ mais non par $U^2$. Si $x$ et $\bar{x}$ sont deux points homologues, la tangente à l'asymptotique $u$ en $x$ et la tangente à l'asymptotique $v$ en $\bar{x}$, se rencontrent.

On a de même

$$\Omega(V^3, V) = 0$$

et la tangente à l'asymptotiques $v$ en $x$ rencontre la tangente à l'asymptotique $u$ en $\bar{x}$.

5. Les surfaces $(x)$ et $(\bar{x})$ jouent des rôles symétriques et par conséquent dans la relation linéaire qui lie les points $U$, $U^1$, $U^2$, $U^3$, $V^3$, $V^2$, $V^1$, le terme en $U^1$ doit manquer.

Écrivons cette relation sous la forme

$$\eta_0 U + \eta_1 U^1 + \eta_2 U^2 + \eta_3 U^3 + \xi_3 V^3 + \xi_2 V^2 + \xi_1 V^1 = 0. \quad (7)$$

L'hyperplan polaire du point $U^3$ passe par les points $U^2$, $U^3$, $V^3$, $V^2$, $V^1$ et comme il passe par le point $U$, on a

$$\eta_1 \Omega(U^3, U^1) = 0.$$

Or, $\Omega(U^3, U^1)$ ne peut être nul, car alors l'hyperplan polaire de $U^3$ contiendrait six points consécutifs de la suite L et celle-ci appartiendrait à cet hyperplan, ce qui est absurde. On a donc $\eta_1 = 0$ et la suite (7) ne contient pas le point $U^1$.

On peut d'ailleurs calculer aisément les coefficients de la suite (7).

Observons que de la relation (6) on tire

$$\Omega(U^3, U^1) = 2\beta_1\Delta, \quad \Omega(U^3, V) = 4a\Delta.$$

De la relation analogue

$$V^3 + \alpha_1 V^1 + b\theta V + 2b[\beta U + H_v^1 U^1 + U^2] = 0,$$

on tire également

$$\Omega(V^3, V^1) = -2\alpha_1\Delta, \quad \Omega(V^3, V) = -4b\Delta.$$

Rappelons en outre que l'on a

$$\Omega(U, U^2) = 2\Delta, \qquad \Omega(U^1, U^2) = 2H_v^1\Delta,$$

$$\Omega(V, V^2) = -2\Delta, \quad \Omega(V^1, V^2) = -2K_u^1\Delta.$$

De la relation (7) on déduit

$$\eta_0 - 2b\xi_3 = 0, \quad H_v^1\eta_2 + \beta_1\eta_3 = 0, \quad \eta_0 - [\beta + (H_v^1)^2]\eta_2 = 0,$$

$$2b\eta_0 + \alpha_1\xi_1 = 0, \quad \xi_2[\alpha + (K_u^1)^2] - K_u^1\xi_1 = 0,$$

$$\xi_1 - K_u^1\xi_2 - \alpha_1\xi_3 = 0, \quad 2a\eta_3 - \xi_2 = 0.$$

On en tire les valeurs des coefficients de l'équation (7) et deux relations,

$$\alpha(H_v^1)^2 = \beta(K_u^1)^2, \quad \alpha_1\beta_1K_u^1 + 4ab\alpha H_v^1 = 0,$$

qui se déduisent les conditions obtenues précédemment.

On a

$$2b\alpha[\{\beta + (H_v^1)^2\}U + \beta_1U^2 - H_v^1U^3]$$
$$+ \beta_1[\alpha V^3 + \alpha_1K_u^1V^2 + \alpha_1\{\alpha + (K_u^1)^2\}V_1] = 0.$$

On obtient de même la relation

$$2a\beta[\{\alpha + (K_u^1)^2\}V + \alpha_1V^2 - K_u^1V^3]$$
$$+ \alpha_1[\beta U^3 + \beta_1H_v^1U^2 + \beta_1\{\beta + (H_v)^2\}U^1] = 0.$$

6. Le point $V^3$ représente la droite $\bar{x}\bar{x}_u$ commune aux plans

$$\alpha_1z_1 + 2b\theta z_2 - 2b\beta z_3 = 0,$$

$$2bz_1 + \alpha_1z_3 - 2b\theta z_4 = 0,$$

$$\alpha_1z_2 - 2b\beta z_4 = 0,$$

$$2bz_2 + \alpha_1z_4 = 0.$$

Les deux dernières équations sont d'ailleurs identiques à cause de la première des conditions (1). La droite $\bar{x}\bar{x}_u$ rencontre la droite $xx_v(z_2 = z_4 = 0)$ au point $(\alpha_1, 0, -2b, 0)$.

Le point $U^3$ représente la droite $\bar{x}\bar{x}_v$ commune aux plans

$$\beta_1 z_1 - 2a\alpha z_2 + 2a\theta z_3 = 0,$$

$$\beta_1 z_3 - 2a\alpha z_4 = 0,$$

$$2az_1 + \beta_1 z_2 - 2a\theta z_4 = 0,$$

$$2az_3 + \beta_1 z_4 = 0,$$

le second et le dernier de ces plans étant d'ailleurs confondus. La droite $\bar{x}\bar{x}_v$ rencontre la droite $xx_u(z_3 = z_4 = 0)$ au point $(\beta_1, -2a, 0, 0)$.

Le plan tangent à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$ a pour équation

$$4abz_1 + 2b\beta_1 z_2 + 2a\alpha_1 z_3 + (\alpha_1\beta_1 - 4ab\theta)z_4 = 0.$$

7. Désignons par $p$ le point de rencontre des droites $xx_u$, $\bar{x}\bar{x}_v$ et par $q$ celui des droites $xx_v$, $\bar{x}\bar{x}_u$. Considérons l'homographie, qui dépend de $u$, $v$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} x & \bar{x} & q & p \\ x & \bar{x} & p & q \end{pmatrix}.$$

A cette homographie correspond dans $S_5$ une homographie $\Sigma$ transformant en elle-même l'hyperquadrique Q.

Aux droites $xp$, $xq$, $\sigma$ fait correspondre respectivement les droites $xq$, $xp$, donc $\Sigma$ fait correspondre V à U et U à V. Aux droites $\bar{x}p$, $\bar{x}q$, $\sigma$ fait correspondre respectivement les droites $\bar{x}q$, $\bar{x}p$, donc $\Sigma$ fait correspondre $V^3$ à $U^3$ et $U^3$ à $V^3$.

Désignons respectivement par $\bar{U}^3$, $\bar{U}^2$, ..., $\bar{V}^3$ les points que $\Sigma$ fait correspondre à $U^3$, $U^2$, ..., $V^3$. Nous avons

$$\bar{U}^3 = V^3, \ \bar{V}^3 = U^3, \ \bar{U} = V, \ \bar{V} = U.$$

On sait qu'une homographie fait correspondre une suite de Laplace à une suite de Laplace, les variables $u$, $v$ étant conservées. A la suite

$$U^3, U^2, U^1, U, V, V^1, V^2, V^3 \qquad \text{(L)}$$

correspond la suite

$$\bar{U}^3,\ \bar{U}^2,\ \bar{U}^1,\ \bar{U},\ \bar{V},\ \bar{V}^1,\ \bar{V}^2,\ \bar{V}^3$$

qui est donc une suite de Laplace. Il faut remarquer que dans la première suite, un point est le transformé du précédent dans le sens des $u$ alors que dans la seconde suite, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $v$.

Il est évident que les deux suites coïncident à l'ordre près. On peut d'ailleurs le voir par le raisonnement suivant.

Posons $\bar{U} = \lambda V$. En dérivant par rapport à $u$, on a

$$\bar{U}_u = \lambda_u V + \lambda[V^1 + K_u V],$$

donc le point $\bar{U}^1$, transformé de $\bar{U}$ dans le sens des $u$, appartient à la droite $VV^1$ et nous pouvons poser

$$\bar{U}^1 = \mu V^1 + \nu V.$$

On en déduit

$$\bar{U}_v^1 = \mu_v V^1 + (\mu k_1 + \nu_v)V - 2a\nu U.$$

Or le point $\bar{U}_v^1$ doit appartenir à la droite $V^1V$, donc on a $\nu = 0$ et $\bar{U}^1 \equiv V^1$.

On démontre de même que l'on a $\bar{U}^2 \equiv V^2$, $\bar{V}^1 \equiv U^1$, $\bar{V}^2 \equiv U^2$.

La suite L est donc transformée en elle-même par l'homographie $\Sigma$.

Cela implique l'égalité des invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont les points de la suite L. On a

$$h_1 = k_1, \quad h_2 = k_2, \quad h_3 = k_3, \quad h_4 = k_4.$$

On a d'ailleurs, puisque $\bar{H}_v^2 = 0$, $\bar{K}_u^2 = 0$,

$$h_4 = k_4 = 4ab.$$

On a en outre

$$(\log . a)_{uv} = (\log . b)_{uv}.$$

Liège, le 5 août 1964.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] *Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1953, pp. 245-254, 363-368).

[2] Cette note paraîtra dans un volume offert à M. HLAVATY à l'occasion de ses 70 ans.

[3] Nous utilisons, sans les définir à nouveau pour ne pas allonger inutilement cette note, les notations employées dans notre mémoire *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in 8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1964).