REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(Anno 1912-1913)

SUR LES

CORRESPONDANCES RATIONNELLES

ENTRE DEUX SURFACES ALGÉBRIQUES

AYANT

MÊMES GENRES ARITHMÉTIQUE ET LINÉAIRE

NOTE

DE

LUCIEN GODEAUX

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1912

M.M. Enriques et Severi ont démontré, il y a quelques années, que si une involution d'ordre premier, sur une surface hyperelliptique ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$), ne possède qu'un nombre fini de coïncidences, cette involution est cyclique ([1]). Plus tard, M. Enriques a démontré que si, sur une surface algébrique dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$), on a une involution d'ordre premier et également de genre un, cette involution est cyclique ([2]).

L'analogie existant entre ces deux résultats nous a conduit à étudier les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques de mêmes genres arithmétique et linéaire p_a, $p^{(1)}$. Nous sommes ainsi arrivés au théorème suivant, dont la démonstration fait l'objet du présent travail.

Soient deux surfaces algébriques F^*, F *ayant les mêmes genres arithmétique* p_a *et linéaire* $p^{(1)}$, *les genres géométriques respectifs* p^*_g, p_g *et telles que* $p_a > 0$, $p^*_g > 1$, $p_g > 1$. *Si entre ces deux surfaces il existe une correspondance* $(1, n)$, *où* n *est premier, le genre linéaire* $p^{(1)}$ *est égal à l'unité, les genres géométriques sont égaux et l'involution d'ordre* n *déterminée sur* F *est cyclique.*

La démonstration de ce théorème a été divisée en deux paragraphes.

Dans le premier paragraphe, en m'appuyant sur un théorème de M. Enriques concernant la relation entre les systèmes

---

([1]) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* “ Acta Mathematica ”, 1909, vol. XXXII, XXXIII (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris).

([2]) *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* “ Rend. R. Accad. di Bologna ”, marzo 1910.

canoniques de F^* et F, et sur l'égalité des genres linéaires de ces surfaces, je démontre que l'on a $p^{(1)} = 1$. Un autre théorème de M. Enriques me permet alors d'affirmer que F^* et F possèdent chacune un faisceau de courbes elliptiques. Au moyen d'un lemme de M. Rosenblatt sur les surfaces de genre $p^{(1)} = 1$, je démontre enfin qu'à une courbe elliptique du faisceau existant sur F^* correspond une seule courbe elliptique du faisceau existant sur F. C'est pour établir cette dernière propriété que l'hypothèse de l'égalité des genres arithmétiques de F^* et F est nécessaire.

Dans le dernier paragraphe, je montre l'existence sur F d'une transformation birationnelle, de période n, de cette surface en elle-même. Cette transformation engendre l'involution déterminée sur F par la correspondance.

§ 1.

1. — Soient F^*, F deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$. En désignant par p^*_g, p_g respectivement les genres geométriques de ces surfaces, nous supposerons que l'on a $p_a > 0$, $p^*_g > 1$, $p_g > 1$. Par ces hypothèses, nous excluons les surfaces rationnelles ($p_a = P_2 = 0$), les surfaces référables point par point aux surfaces réglées ($P_4 = P_6 = 0$), les surfaces hyperelliptiques ($p_a = -1, p_g = P_4 = 1$), elliptiques ($p_a = -1$), les surfaces à courbe canonique ou pluricanonique d'ordre zéro ($P_4 = 1$), etc.

Supposons qu'entre les surfaces F^*, F existe une correspondance $(1, n)$, n étant premier. A un point de F^* correspondront donc n points (distincts ou non) de F et, inversement, à un point de F correspondra un seul point de F^*.

Nous admettrons, du moins dans ce premier paragraphe, que les surfaces envisagées sont dépourvues de courbes exceptionnelles (ce qui n'enlève rien à la généralité, puisque l'on a toujours $P_{12} > 0$).

Indiquons par $|L^*|$ le système canonique de F^*, par $|L|$ celui de F et par D la courbe (éventuellement d'ordre zéro), lieu des points de coïncidence pour l'involution I_n définie sur F par la correspondance donnée (un groupe de I_n étant un groupe de n points correspondants à un même point de F^*).

Par un théorème de M. Enriques (¹), on a, sur F,

$$|L' + D| = |L|, \tag{I}$$

$|L'|$ désignant le système linéaire correspondant, sur F, au système canonique $|L^*|$ de F^*.

De l'égalité précédente, on déduit

$$n(p^{(1)} - 1) + [DD] + [L'D] = p^{(1)} - 1,$$

où $[DD]$ et $[L'D]$ désignent, suivant une notation usitée, respectivement le degré virtuel de la courbe D, et le nombre des points communs aux courbes D et L'.

On a $[DD] \geq 0$, $p^{(1)} \geq 1$, $n > 1$, $[L'D] \geq 0$, donc nécessairement,

$$p^{(1)} = 1, \; [DD] = 0, \; [L'D] = 0.$$

Par un théorème de M. Enriques (²), une surface de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ et de genre arithmétique $p_a > 0$, possède un faisceau de genre $p_g - p_a$, constitué de courbes elliptiques, hors le cas $p_1 = P_2 = 1$. Le système canonique de la surface est composé avec ce faisceau.

Nous voyons donc que sur la surface F^* il existe un faisceau $\{C^*\}$ de genre $p^*_g - p_a$, constitué de courbes elliptiques C^*, et de même, sur F, un faisceau $\{C\}$, de genre $p_g - p_a$, de courbes elliptiques C.

Des égalités $[DD] = 0$, $[L'D] = 0$ et (I), on déduit d'abord que la courbe de coïncidence D, si elle existe, est constituée de quelques courbes du faisceau $\{C\}$. On en déduit de plus que la transformée d'une courbe C^* est constituée par quelques courbes C.

Nous allons maintenant démontrer qu'à une courbe C^* ne peut correspondre qu'une seule courbe C.

(¹) *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche.* " Mem. della R. Accademia di Torino ", 1893, ser. 2ª, vol. XLIV. Voir aussi: Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica.* " Rend. R. Ist. Lomb. ", 1893, ser. 2ª, vol. XXXVI.

(²) *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. " Rend. della R. Accad. di Bologna ", déc. 1906.

2. — Rappelons tout d'abord un lemme de M. Rosenblatt sur les surfaces de genre $p^{(1)} = 1$ (¹). Soit une surface algébrique de genres $p^{(1)} = 1$, $p_a > 0$, $p_g > 1$. D'après un théorème de M. Enriques invoqué précédemment, cette surface possède un faisceau $\}k\{$ de genre $p_g - p_a$ de courbes elliptiques, avec lequel est composé le système canonique.

Soit m le nombre de courbes k entrant dans une courbe canonique de la surface. Quelques-unes de ces courbes pourront être fixes, c'est-à-dire appartenir à toutes les courbes canoniques de la surface. De plus, le système canonique de la surface pourra avoir quelques autres composantes fixes, éventuellement des parties de courbes k. Quoiqu'il en soit, les groupes de m courbes k forment, dans le faisceau $\}k\{$, une série linéaire $g_m^{p_g-1}$ dont la dimension $p_g - 1 (> 0)$ est égale à la dimension du système canonique de la surface.

Supposons que la série $g_m^{p_g-1}$ puisse être spéciale. Alors, on a, par le théorème de Riemann-Roch,

$$p_g - 1 > m - (p_g - p_a),$$

ou

$$m < 2p_g - p_a - 1.$$

D'autre part, le théorème de Clifford donne

$$m \geq 2(p_g - 1).$$

On a donc

$$2p_g - p_a - 1 > 2p_g - 2,$$

c'est-à-dire $p_a < 1$. Mais nous avons supposé $p_a > 0$, donc la $g_m^{p_g-1}$ ne peut être spéciale.

Si la $g_m^{p_g-1}$ n'est pas spéciale, nous avons, par le théorème de Riemann Roch,

$$p_g - 1 = m - (p_g - p_a),$$

d'où $m = 2p_g - p_a - 1$. Ainsi:

(¹) *Algebraische Flachen mit diskontinuirlich unendlich vielen birationalen Transformationen in sich.* " Rendic. del Circ. Matem. di Palermo ", 1912, vol. XXXIII.

Le système canonique d'une surface algébrique de genres $p^{(1)} = 1$, $p_a > 0$, $p_g > 1$, *est composé avec un faisceau de courbes elliptiques, chaque courbe canonique se composant de* $2p_g - p_a - 1$ *courbes du faisceau, et éventuellement de quelques composantes fixes qui ne sont pas des courbes totales du faisceau.*

Observation. — Le lemme de M. Rosenblatt s'étend avec une légère modification au cas $p_a = 0$. Alors, on a en effet, en désignant par $i > 0$ l'indice de spécialité de la $g_m^{p_g - 1}$,

$$2p_g - 1 = m + i \qquad \text{(Riemann-Roch)}$$

$$2(p_g - 1) \leq m. \qquad \text{(Clifford).}$$

On en déduit $i = 1$ et par suite:

Une courbe canonique d'une surface de genres $p^{(1)} = 1$, $p_a = 0$, $p_g > 1$ *se compose de*

a) $2p_g - 1$ *courbes du faisceau de genre* p_g *de courbes elliptiques* $\{k\}$ *existant sur la surface, ou de*

b) $2p_g - 2$ *courbes formant un groupe canonique de* $\{k\}$, *en dehors de composantes fixes éventuelles.*

3. — Reprenons les surfaces F^*, F liées par la correspondance algébrique $(1, n)$, et supposons qu'il puisse se faire qu'à une courbe générique C^* de F^* correspondent plusieurs courbes C de F. Le nombre de ces courbes est nécessairement un diviseur de n, et n étant premier, il ne peut être que n lui-même.

Dans le faisceau $\{C\}$, nous avons par suite une involution d'ordre n et de genre $p^*_g - p_a$. Le nombre des coïncidences de cette involution est, d'après la formule de Zeuthen, égal à $2(p_g - p_a - 1) - 2n(p^*_g - p_a - 1)$. La courbe de coïncidence D de l'involution I_n sur la surface F est évidemment constituée par les courbes C ainsi obtenues.

Une courbe canonique L^* de F^* comprend, comme nous avons vu, $2p^*_g - p_a - 1$ courbes C^*. Une courbe canonique L de F comprend $2p_g - p_a - 1$ courbes C. Or nous avons la relation

$$|L' + D| = |L|.$$

Une courbe L comprend donc:

a) $n(2p_g{}^* - p_a - 1)$ courbes C provenant d'une courbe L^*,

b) $2(p_g - p_a - 1) - 2n(p_g{}^* - p_a - 1)$ courbes C composant la courbe D,

c) éventuellement quelques courbes C transformées de courbes partielles du faisceau $\{C^*\}$ entrant comme composantes fixes dans $|L^*|$.

Nous avons donc

$$n(2p_g{}^* - p_a - 1) + 2(p_g - p_a - 1) - 2n(p_g{}^* - p_a - 1) \leq 2p_g - p_a - 1,$$

c'est-à-dire

$$(p_a + 1)(n - 1) \leq 0.$$

Or, nous avons $n > 1$; l'inégalité précédente entraîne donc $p_a \leq -1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $p_a > 0$.

La correspondance entre F^* et F est donc telle que la transformée d'une courbe elliptique C^* de F^* est une courbe C unique de F. Il existe donc une correspondance birationnelle entre les faisceaux $\{C^*\}$, $\{C\}$ de genres respectifs $p^*_g - p_a$, $p_g - p_a$ et par suite on a $p_g = p^*_g$.

En résumé, *les surfaces* F*, F, *liées par une correspondance* (1, n), *où* n *est premier*, *ont*:

1° *même genre linéaire* $\mathrm{p}^{(1)}$ (*par hypothèse*),

2° $\mathrm{p}^{(1)} = 1$,

3° *même genre arithmétique* $\mathrm{p}_a > 0$ (*par hypothèse*),

4° *même genre géométrique* $\mathrm{p}_g > 1$,

5° *chacune un faisceau de genre* $\mathrm{p}_g - \mathrm{p}_a$ *de courbes elliptiques. La correspondance* (1, n) *entraîne une correspondance birationnelle entre les deux faisceaux.*

§ 2.

4. — Soit F une surface algébrique de genres linéaire $p^{(1)} = 1$, arithmétique $p_a > 0$, géométrique $p_g > 1$. Sur cette surface, nous avons un faisceau de genre $p_g - p_a$, $\{C\}$, de courbes elliptiques, avec lequel est composé le système canonique.

Supposons que sur F il existe une involution I_n, d'ordre premier n, pour laquelle les courbes C sont invariantes. Si F^* est une surface dont les points représentent les groupes de I_n, nous supposerons que cette surface a les mêmes genres linéaire, arithmétique et géométrique que F. Sur F^*, nous avons un faisceau $\} C^* \{$, de genre $p_g - p_a$, de courbes elliptiques. Les points d'une courbe C^* représentent les groupes de I_n situés sur une courbe C.

On sait qu'une involution elliptique d'ordre premier située sur une courbe elliptique, est cyclique. En d'autres termes, si entre deux courbes elliptiques C^*, C, nous avons une correspondance algébrique $(1, n)$, où n est premier, il existe une transformation birationnelle T de C en elle-même, qui possède les propriétés suivantes:

a) elle est de période n $(T^n \equiv 1)$,

b) elle transforme en lui-même tout groupe de n points de C correspondants à un même point de C^*.

Donc, sur chaque courbe elliptique C du faisceau $\} C \{$ sur F, nous avons une transformation birationnelle T transformant en lui-même tout groupe de I_n situé sur la courbe envisagée. Mais nous ne pouvons pas en conclure qu'il existe sur F une unique transformation birationnelle T', de période n, laissant invariant tout groupe de I_n et définissant, sur chaque courbe C, la transformation T relative. Un raisonnement bien simple le montre de suite. Imaginons une courbe dont les points correspondent aux courbes du faisceau $\} C \{$, ou mieux, la surface de Riemann R représentant les points réels ou imaginaires de cette courbe. A chaque point P de R correspond une courbe C de $\} C \{$ et par conséquent une transformation cyclique T définie *sur cette courbe* par I_n.

Si le point P décrit un cycle fermé sur R, la transformation T varie d'une façon continue. Mais lorsque P est revenu à sa position initial P_0, il se peut fort bien que la transformation T obtenue par continuité ne coïncide pas avec la transformation initiale T_0, mais coïncide au contraire avec une puissance T_0^v $(1 < v < n)$ de cette transformation. C'est ce qui n'arriverait pas si T' existait.

Nous réussirons cependant à établir l'existence de cette transformation T'.

5. Forme de l'équation de la surface F^*. — Considérons un " modèle projectif " de la surface F^* situé dans un espace linéaire à trois dimensions, de coordonnées cartésiennes (x, y, z). Une courbe elliptique C^* sera représentée par deux équations algébriques

$$\lambda = \varphi(x, y, z), \quad \mu = \psi(x, y, z),$$

λ et μ étant deux paramètres variables avec la courbe et liés par une équation algébrique

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

de genre $p_g - p_a$. L'équation de F^* sera ainsi

$$f(\varphi, \psi) = 0.$$

Posons

$$\psi(x, y, z) = \frac{\psi_1(x, y, z)}{\psi_2(x, y, z)},$$

ψ_1 et ψ_2 étant des polynomes entiers.

Considérons alors un système linéaire de surfaces contenant la surface

$$\psi_1(x, y, z) - \mu\psi_2(x, y, z) = 0,$$

et assez ample pour découper sur F^* un système linéaire, ∞^3, simple, de courbes. Cela est évidemment toujours possible. Rapportant projectivement les courbes de ce système aux plans d'un espace (X, Y, Z), on obtient un nouveau modèle projectif de F^* dont l'équation s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les équations

$$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \quad \mu = \frac{Y}{X},$$

(1) $$f(\lambda, \mu) = 0.$$

Les équations

(2) $$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \qquad X\mu - Y = 0$$

représentent une courbe elliptique C^*.

Dans la suite, lorsqu'il sera question de la surface F^*, c'est de ce dernier modèle projectif qu'il s'agira.

Soient m l'ordre de F^*, m' l'ordre de C^*, η le degré de $f(\lambda, \mu)$ par rapport à λ. La surface F^*, d'ordre m, possède une droite $(m - \eta m')$-uple, l'axe des Z, et tout plan passant par cette droite rencontre encore la surface en η courbes elliptiques C^*.

6. Forme de l'équation de la surface F. — Soient X, Y, Z, U les coordonnées cartésiennes d'un espace linéaire à quatre dimensions.

Considérons une courbe elliptique C^* représentée par les équations (2) où les paramètres λ et μ ont des valeurs déterminées.

On sait que toute courbe elliptique irréductible C, possédant une involution d'ordre premier n dont les groupes sont représentés par les points de C^*, peut être représentée par les équations

$$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \quad \mu X - Y = 0, \quad U^n = H(X, Y, Z), \tag{3}$$

où $H(X, Y, Z)$ est un polynôme entier, irréductible, de degré n en X, Y, Z, choisi de telle manière que la surface $H = 0$ ait des contacts n — ponctuels en tous ses points de rencontre avec la courbe C^*.

Les coefficients du polynôme $H(X, Y, Z)$ dépendent en général de quelques irrationalités arithmétiques. Ces irrationalités pourront varier avec C^*, c'est-à-dire avec λ et μ.

Considérons la surface de Riemann R dont les points représentent les couples de valeurs réelles ou imaginaires de λ, μ satisfaisant à l'équation (1). A tout point P de R correspond donc une courbe C^* et, à cause des irrationalités entrant dans les coefficients de $H(X, Y, Z)$, un certain nombre $\rho > 1$ de courbes C birationnellement distinctes.

Partons d'une position initiale P_0 et faisons décrire au point P un cycle fermé. Lorsque P sera revenu en P_0, les ρ courbes C, qui auront varié d'une façon continue, ne se représenteront généralement plus dans le même ordre. Cela tient à la variation des irrationnalités des coefficients de $H(X, Y, Z)$.

Or, considérons la surface F dont il a été question plus haut. A tout point de R correspond une courbe C^* de F^* et, d'après ce que nous avons vu, une seule courbe C de F. Cette courbe C sera d'ailleurs représentée par des équations telles que (3). Soient C_0 la courbe C qui correspond à la position initiale P_0; C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\rho-1)}$ les $\rho - 1$ autres courbes représentées par les équations (3), dans lesquelles λ et μ assignent les valeurs correspondantes à P_0. Lorsque P, après avoir décrit un cycle fermé quelconque, est revenu en P_0, la courbe C définie par continuité en partant de C_0, ne peut coïncider avec l'une des courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\rho-1)}$, car alors la surface F n'existerait pas. Ces $\rho - 1$ dernières courbes se seront d'ailleurs généralement permutées entre elles.

Nous voyons donc que, si F existe, il y a une courbe C définie par les équations (3) qui se reproduit lorsque le point P correspondant de R décrit des cycles fermés quelconques. En d'autres termes, dire que F existe revient à dire qu'il existe un polynôme $H(X, Y, Z)$ dépendant rationnellement de λ et μ. Indiquons ce polynôme par $H(X, Y, Z;\ \lambda, \mu)$.

Si la surface F existe, elle sera donc représentée par les équations obtenues en éliminant λ et μ entre

$$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \quad \mu = \frac{Y}{X},$$

$$f(\lambda, \mu) = 0, \qquad U^n = H(X, Y, Z;\ \lambda, \mu).$$

L'équation

$$H\left(X, Y, Z;\ \Phi, \frac{Y}{X}\right) = 0$$

(rendue entière) représente une surface H d'un certain ordre $\nu (> \eta n)$, passant $(\nu - \eta n)$ fois par l'axe des Z. Tout plan passant par cette droite rencontre la surface H, en dehors de cette droite, en η courbes d'ordre n. De plus, le long de leur courbe d'intersection (en dehors de l'axe des Z), les surfaces F^* et H ont un contact n-ponctuel.

7. Conclusion. — La transformation homographique de période n

$$X' = X, \; Y' = Y, \; Z' = Z, \; U' = \epsilon U,$$

où ϵ est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité, transforme en elle-même la surface F. Par suite, il existe une transformation birationnelle cyclique T' d'ordre n de F en elle-même. Cette transformation engendre une involution d'ordre n, dont les groupes sont représentés par les points de F^*. De plus, T' transforme chaque C en elle-même. L'involution engendrée par T' coïncide donc avec I_n. On en conclut que:

Si entre deux surfaces algébriques F*, F, *de genres* $p^{(1)} = 1$, $p_a > 0$, $p_g > 1$, *on a une correspondance* (1, n), *où* n *est premier, l'involution d'ordre* n *déterminée sur* F *est cyclique.*

Ce théorème, rapproché de celui que nous avons établi au § 1, démontre le théorème énoncé au début de ce travail.

Liège, Septembre 1912.