EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
MAI 1912

Sur les systèmes linéaires quadruplement infinis de courbes appartenant à une surface algébrique

par

Lucien Godeaux

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1912

O systemach linij krzywych powierzchni algebraicznej, liniowo zależnych od pięciu parametrów jednorodnych. — Sur les systèmes linéaires quadruplement infinis de courbes appartenant à une surface algébrique.

Note

de M. ***LUCIEN GODEAUX,***

présentée, dans la séance du 3 Juin 1912, par M. K. Żorawski m. c.

Partant d'un système linéaire $|C|$ de courbes algébriques tracées sur une surface algébrique F, et formant les jacobiennes des réseaux de courbes situés dans ce système, on obtient un nouveau système linéaire $|C_j|$, le jacobien du premier. C'est là une propriété bien connue que M. Enriques a établie et qui lui a permis de rendre notablement plus simple la définition du système adjoint à un système linéaire. On peut se demander à quoi l'on arrive non en opérant sur ce système comme on a opéré sur le premier (ce qui ne conduirait à rien de nouveau), mais en prenant la jacobienne de chaque réseau de courbes C_j, toutes les courbes de chacun de ces réseaux provenant de réseaux de $|C|$ contenus dans un système linéaire triplement infini de $|C|$. Chaque bi-jacobienne C_{jj} sera alors donnée par un système triplement infini de $|C|$. On sait alors, par MM. Bonnessen et Pannelli, que les courbes C_{jj} sont réductibles et se décomposent précisément en une courbe C et en une autre courbe D, lieu des points de la surface F qui sont points de rebroussement pour une courbe d'un système linéaire triplement infini de $|C|$. Eh bien, me plaçant dans l'hypothèse où le système $|C|$ est quadruplement infini, je démontre que ces courbes D engendrent un système ∞^4 $\{D\}$, d'indice 16, qui est d'ailleurs compris dans un système linéaire. J'établis alors que les points de la surface, qui sont doubles pour les courbes d'un réseau de $|C|$, ou qui sont triples ou tacnodaux symétriques pour une courbe de $|C|$, sont respectivement points-base doubles et simples pour le système $\{D\}$. De plus, le nombre virtuel de ces points-base, diminué de 104 fois le genre d'une courbe C, est un invariant relatif de la surface.

1. Sur une surface algébrique F, supposée dépourvue de points multiples [1]), considérons un système linéaire de courbes algébriques $|C|$, simple, quadruplement infini, dépourvu de points-base et de courbes fondamentales.

Dans un système linéaire triplement infini contenu dans $|C|$, il y a ∞^1 courbes ayant un point de rebroussement et le lieu de ces points de rebroussement est une certaine courbe D donnant lieu à l'égalité symbolique [2]):

$$|D| = |4L + 8C|,$$

dans laquelle $|L|$ désigne le système canonique de la surface F.

Dans le système linéaire $|C|$, nous avons ∞^4 systèmes linéaires triplement infinis, donc le système $|C|$ donnera naissance à un système quadruplement infini de courbes D. Mais ce système n'est pas linéaire. Remarquons en effet que les courbes de $|C|$ qui ont un point double en un point P de la surface F, forment un faisceau. Celui-ci détermine une involution du second ordre dans le faisceau de droites de sommet P, situé dans le plan tangent à la surface F en P: deux droites de ce faisceau sont correspondantes lorsque ce sont les tangentes à une même courbe C en P. Il y a deux coïncidences, donc par P passent deux courbes C qui ont un point de rebroussement en ce point.

Considérons quatre points P, P', P'', P''' quelconques sur F. Quatre courbes de $|C|$ qui ont un point de rebroussement respectivement en chacun de ces quatre points déterminent un système linéaire triplement infini dans $|C|$, auquel correspond une courbe D passant par les points P, P', P'', P'''. Mais ces quatre courbes peuvent être choisies de $2^4 = 16$ manières, donc:

[1]) Cela n'enlève rien à la généralité pourvu que l'on suppose que la surface se trouve située dans un espace linéaire d'au moins cinq dimensions. Voir Picard et Simart, Fonctions algébriques de deux variables indépendantes, tome I, chap. IV. Paris, Gauthier-Villars, 1897.

[2]) Bonnessen, Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique. Oversigt over Danske Akad. 1906. Pannelli, Sui sistemi triplamente infiniti di curve tracciate sopra una superficie algebrica. Rend. Circ. Palermo, 1905, t. XX.

Les courbes D forment un système continu quadruplement infini $\{D\}$, d'indice seize[1]).

Ce système $\{D\}$ est rationnel puisqu'il est lié birationnellement aux systèmes linéaires triplement infinis de $|C|$; par suite, d'après un théorème de M. Enriques[2]), il est contenu dans un système linéaire que nous savons déjà, d'ailleurs, être $|4L+8C|$.

Le raisonnement tenu ci-dessus nous permet d'affirmer plus généralement que:

Les courbes D qui correspondent aux systèmes linéaires triplement infinis de $|C|$ ayant en commun un système i fois infini, linéaire, $(0 \leqslant i < 3)$, forment un système continu $\{D\}$ d'indice 2^{3-i} et de dimension $3-i$.

2. Dans le système $|C|$, il existe un nombre fini θ de réseaux dont toutes les courbes ont un point double (nécessairement fixe). Dans un quelconque de ces réseaux, que nous désignerons par $|\overline{C}|$, dont toutes les courbes possèdent un point double en un certain point P, il y a ∞^1 courbes ayant un point de rebroussement au point P, et ces courbes forment un système d'indice deux. En effet, les courbes de $|\overline{C}|$ passant par un point quelconque forment un faisceau et dans celui-ci, il y a deux courbes ayant un point de rebroussement en P.

Inversement, si par un point passent ∞^1 courbes C ayant un rebroussement en ce point, celui-ci est double pour toutes les courbes d'un réseau, à moins que les tangentes de rebroussement ne coïncident.

Si nous considérons un système triplement infini et linéaire dans $|C|$, ce système contiendra deux courbes de $|\overline{C}|$ ayant un point de rebroussement en P et ce point sera double pour la courbe D relative au système considéré. Ainsi:

Le système $\{D\}$ a θ points-base doubles et chacun

[1]) La courbe que j'ai considérée dans mon travail publié par l'Académie R. de Belgique (Bull. Classe d. Sciences, 1910) est la jacobienne d'un réseau déterminé par trois courbes D sur la surface F. Elle n'est donc pas le lieu des points où des courbes C auraient un tacnode symétrique comme je le croyais alors, mais la suite du raisonnement dans cet article prouve qu'elle contient ces points s'il y en a.

[2]) Un' osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche. Rend. Circolo Palermo, 1896.

de ces points est double pour les courbes d'un réseau de $|C|$.

Nous savons qu'une courbe D possède:

$$2n+4(2\pi-2)+2\omega-12p_a-14$$

points doubles, n et π étant respectivement le degré et le genre de $|C|$, p_a et ω étant le genre arithmétique et l'invariant de Castelnuovo-Enriques de F[1]). Ces points sont doubles pour les courbes de faisceaux compris dans le système, donc on a:

$$\theta \leqslant 2n+4(2\pi-2)+2\omega-12p_a-14 .$$

3. Supposons que le système $\{D\}$ a encore un point-base Q en dehors des θ points déjà rencontrés. Alors, il y a au moins une courbe D, soit $\overline{D}$, ayant un point double en Q (il suffit de prendre une courbe D tangente en Q à deux directions). Soit $|\overline{C}|$ le système linéaire ∞^3 donnant naissance à cette courbe $\overline{D}$. Supposons en premier lieu que le système $|\overline{C}|$ est simple, et rapportons projectivement les courbes $\overline{C}$ aux plans d'un S_3. Nous obtenons une surface F^* birationnellement identique à F, à sections planes $\overline{C}^*$. A la courbe $\overline{D}$ correspond, comme on sait, la courbe parabolique $\overline{D}^*$ de F^*, et cette courbe $\overline{D}^*$ a un point double Q^* correspondant à Q.

Deux cas peuvent se présenter:

a) Q^* est un point simple de la surface F^*. Alors, par un théorème de M. Segre[2]), il y a une courbe $\overline{C}^*$ qui possède en Q^* un point triple, ou un point de rebroussement tacnodal symétrique. En correspondance, il y aura sur la surface F une courbe C (et précisément une $\overline{C}$), présentant la même singularité au point Q. Ce

[1]) Bonnessen et Pannelli, loc. cit.

[2]) Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie. Rend. R. Accad. Lincei. 2º sem. 1897.

Une courbe plane $f=0$, ayant un tacnode symétrique à l'origine, avec la tangente t comme axe des x, sera représentée par:

$$f \equiv (\alpha x^4+\ldots)+y(\beta x^3+\ldots)+y^2(\gamma+\ldots)+\cdots=0.$$

Alors que la hessienne de la courbe a un point triple en un tacnode ordinaire, elle a un point quadruple en un tacnode symétrique.

point sera point-base simple pour le système $\{D\}$, mais sera double pour ∞^3 courbes D, provenant des systèmes linéaires ∞^3 de $|C|$ contenant la courbe ayant le point triple ou le tacnode symétrique en Q.

b) Q^* est un point double de la surface, c'est-à-dire, à cause de nos hypothèses sur $|C|$, est situé sur la courbe double de la surface F^*. Alors Q^* est un point-pince et il y aura, dans $|\overline{C}|$, deux courbes ayant un point de rebroussement en Q. Mais puisque Q est un point-base de $\{D\}$, il y a aura d'autres courbes C ayant un rebroussement en Q, et toutes ces courbes n'auront pas même tangente de rebroussement. Mais alors Q serait un des θ points rencontrés plus haut. Donc le cas a) est le seul possible.

Si le système $|\overline{C}|$ était composé, le même raisonnement serait applicable; la seule différence serait qu'il y aurait des courbes C ayant plusieurs points singuliers analogues.

Outre les θ points-base doubles déjà mentionnés le système $\{D\}$ possède des points-base simples; ce sont les points où des courbes du système $|C|$ ont soit un point triple, soit un tacnode symétrique.

Nous indiquerons par ϱ le nombre de ces points-base simples de $\{D\}$.

4. Le degré virtuel du système $\{D\}$ est égal à celui du système $|4L+8C|$, donc à $16(\omega-1)+64(2\pi-2)$.

Mais deux systèmes linéaires triplement infinis situés dans $|C$ ont en commun un réseau; et dans celui-ci se trouvent[1]) $24(p_a+\pi)$ courbes ayant un point de rebroussement. Ces points sont communs aux deux courbes D naissant des systèmes considérés. D'autre part, ces courbes n'ont plus en commun que les points-base de $\{D\}$, donc:

$$4\theta+\varrho+24p_a+24\pi=16(\omega-1)+64(2\pi-2),$$

c'est-à-dire:

$$4\theta+\varrho=16\omega-24p_a+104\pi-144.$$

Le quadruple du nombre des points doubles pour les courbes de réseaux dans un système linéaire qua-

[1]) Severi. Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione... Atti della R. Accad. di Torino, 1902, XXXVII.

druplement infini, augmenté du nombre des courbes de ce système qui ont un point triple ou un tacnode symétrique, et diminué de 104 fois le genre de la courbe générique du système, est un invariant relatif de la surface.

Bologne, 2 Mai 1912.