Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LXXII. Band. 3. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles.

Par

Lucien Godeaux à Morlanwelz (Belgique).

M. Noether*) a considéré les surfaces algébriques ($p_g > 1$, $p^{(1)} = 1$) dont les courbes canoniques sont elliptiques, ou se décomposent en des courbes elliptiques (d'un faisceau). Plus tard, M. Enriques**) a déterminé les surfaces algébriques ($p_g > 2$, $p^{(1)} = 2p_g - 3$) dont les courbes canoniques sont hyperelliptiques et irréductibles. Actuellement, je me propose d'étudier les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont irréductibles et elliptiques doubles, c'est-à-dire possèdent une série elliptique de groupes de deux points.***)

Je parviens aux résultats suivants:

Une surface algébrique de genre géométrique p_g supérieur à trois, dont les courbes canoniques sont irréductibles et elliptiques doubles,

a) *possède un faisceau elliptique de courbes de genre deux, ou*

b) *possède deux faisceaux linéaires de courbes de genre trois, hyperelliptiques* ($p_g = 9$), *ou peut se ramener, par une transformation birationnelle à*

c) *un plan double dont la courbe de diramation est du douzième ordre* ($p_g = 10$).

1. Soit F une surface algébrique de genre géométrique $p_g > 3$, dont le système canonique $|C|$ est formé par des courbes irréductibles C, elliptiques doubles; c'est-à-dire que chaque courbe C possède une série elliptique γ de couples de points telle qu'un point de la courbe appartienne à un seul de ces couples.

*) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Math. Ann. 8 (1874).

**) Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche. Rend. della R. Accad. dei Lincei. 1° sem. 1896 (5) 5, p. 191—197.

***) Comessatti, Sulle curve doppie di genere qualunque. Mem. della R. Accad. di Torino, 1909, (2) 60, p. 313—350.

Considérons un faisceau $|C_0|$ de courbes canoniques C. Les couples des séries γ relatives aux courbes C_0 de $|C_0|$ sont en nombre ∞^2 et forment évidemment une involution Γ_2 sur la surface F. Soit F^* une surface dont les points représentent, biunivoquement, les groupes de l'involution Γ_2. Aux courbes C_0 correspondront sur F^* des courbes elliptiques C_0^* formant un faisceau $|C_0^*|$. Ce faisceau a certainement des points-base, car d'après un théorème de M. Noether*), le degré $p^{(2)}$ du système $|C|$ sur F est $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 \geqq 2p_g - 4 \geqq 2$. Par suite, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et Enriques**), la surface F^* est rationnelle, ou bien elle peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface réglée elliptique. Nous voyons donc que la surface F est représentable sur un plan double, ou sur une surface réglée elliptique double.

2. Nous allons maintenant montrer que le système canonique $|C|$ est nécessairement composé avec une involution qui coïncide avec l'involution Γ_2 déterminée par un faisceau quelconque de courbes canoniques. En effet, s'il en était autrement, il serait possible de trouver un réseau de courbes canoniques simple. Soit $|C_0|$ un pareil réseau, s'il est possible d'en trouver un. Alors, la série caractéristique de ce réseau n'est pas composée, sur une courbe quelconque C_0, avec la γ elliptique portée par cette courbe. Considérons un point quelconque P de la surface. Par P passent ∞^1 courbes C_0 du réseau considéré et les conjugués de P sur ces différentes courbes dans les séries elliptiques γ décrivent une certaine courbe rationnelle Γ. Faisons varier P sur une courbe Γ particulière, soit Γ_0. Alors, trois cas peuvent se présenter:

1°) les courbes Γ relatives aux points P de Γ_0 coïncident toutes avec Γ_0. Dans ce cas, il y a ∞^1 courbes Γ formant nécessairement un faisceau. Une courbe de ce faisceau rencontrant une C_0 en un groupe de la série elliptique relative à cette courbe C_0, ce faisceau est elliptique. D'après un théorème de M. Enriques***), la surface F possédant un faisceau elliptique de courbes rationnelles, peut se ramener, par une transformation birationelle, à une surface réglée elliptique. Or, cela est impossible, puisqu'alors la surface F n'aurait pas de système canonique.

2°) La courbe Γ relative à un point variable P de Γ_0 est fixe, mais ne coïncide pas avec Γ_0. Alors, il y a ∞^1 courbes Γ formant un faisceau dont le genre est égal au genre d'une courbe C_0, car une courbe Γ ne rencontre une courbe C_0 qu'en un seul point. Mais la surface F, possédant

*) loc. cit.

**) Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. Ann. di Mat. 1901 (3) 6, p. 165—225 (n° 11).

***) Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali. Math. Ann. 52.

un faisceau irrationnel de courbes rationnelles, peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface réglée, d'après le théorème de M. Enriques qui vient d'être rappelé. Cela est impossible par hypothèse.

3°) La courbe Γ relative à un point P de Γ_0 varie avec ce point. Alors, F possède ∞^2 courbes rationnelles Γ et est donc rationnelle, ce qui est impossible.

On en conclut qu'un réseau de courbes canoniques de F est nécessairement composé. Le raisonnement qui vient d'être employé est une simple extension de celui qui a permis à M. Castelnuovo*) de démontrer qu'une surface possédant un réseau de courbes hyperelliptiques, est rationnelle ou référable, par une transformation birationnelle, à une surface réglée.

Montrons maintenant que l'involution avec laquelle un réseau $|C_0|$ de courbes canoniques est composé, coïncide avec chaque involution Γ_2 déterminée par un faisceau de ce réseau. S'il en était en effet autrement, une courbe C_0 du réseau porterait une infinité continue de séries irrationnelles, ce qui est impossible, d'après un théorème de MM. Humbert et Castelnuovo**), puisque l'on a $p^{(1)} \geqq 2p_g - 3 \geqq 3$.

Cela étant, on déduit immédiatement que le système canonique $|C|$ est composé avec une involution de couples de points. Il suffit de procéder de proche en proche par la considération de réseaux ayant un faisceau en commun.

3. Commençons par étudier le cas où la surface F est représentable sur un plan double, c'est-à-dire où l'involution qui compose le système canonique $|C|$ est rationnelle. Si nous représentons par les points d'un plan les groupes de cette involution, aux courbes C correspondront des courbes elliptiques formant évidemment un système complet et simple. Par suite, si nous rapportons projectivement les courbes C de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{p_g-1} à $p_g - 1$ dimensions, la surface F sera représentée doublement sur une surface rationnelle F^* de cette espace, les sections hyperplanes de F^* étant elliptiques. Mais, par un théorème de MM. Castelnuovo et Del Pezzo***), la surface F^* est:

1°) la surface de l'espace S_9 représentant le système linéaire des cubiques planes (ou une de ses projections), ou

2°) la surface de l'espace S_8 représentant le système linéaire des quartiques planes ayant deux points doubles fixes:

---

*) Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1894.

**) Pour une démonstration, voir R. Torelli, Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti a una curva algebrica. Atti del R. Ist. Veneto, 1907—08, 67.

***) Castelnuovo, Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1894, 3.

Dans tous les cas, l'ordre de la surface F^* est égal à $\frac{1}{2}(p^{(1)}-1)$. Nous allons examiner ces cas séparément.

4. Supposons que F^* est la surface d'ordre 9, de S_9, représentant le système linéaire des cubiques planes d'un plan. Alors, on a $p_g = 10$. $p^{(1)} = 19$. La courbe de diramation sur la surface F^* a l'ordre égal au nombre de coïncidences d'une série elliptique de couples de points sur une courbe d'ordre 19. D'après la formule classique de Zeuthen, ce nombre est 36. — La surface F est représentable sur le plan double dont la courbe de diramation a l'ordre $\frac{1}{3}\,36 = 12$.

Inversement, un plan double dont la courbe de diramation a l'ordre 12 représente une surface à courbes canoniques elliptiques doubles. En effet, d'après un théorème de M. Enriques*), les courbes canoniques d'un plan double sont doubles, et si $2n$ est l'ordre de la courbe de diramation, les courbes canoniques ont l'ordre $n-3$.

Partons maintenant d'un plan double dont la courbe de diramation D est du douzième ordre. Si D a un point quadruple ou quintuple (isolé), les courbes canoniques passeront simplement par ce point d'après un théorème de M. Enriques**). Par conséquent:

Les plans doubles dont la courbe de diramation est du douzième ordre et possède ϱ points quadruples et ϱ' points quintuples (isolés), représentent des surfaces à courbes canoniques (irreductibles) elliptiques doubles de genre géométrique $p_g = 10-(\varrho+\varrho')$.

On pourrait de même considérer les couples de points triples infiniments voisins de la courbe D. Une telle singularité abaisserait p_g d'une unité (Enriques).

5. Supposons actuellement que la surface F^* est du huitième ordre dans S_8 et représente le système linéaire des quartiques ayant deux points doubles (distincts) P_1, P_2 dans un plan π. Alors la surface F^* possède deux faisceaux linéaires de coniques***), généralement dépourvus de points-base, dont les courbes se rencontrent en un point. En correspondance, on a sur la surface F deux faisceaux linéaires de courbes hyperelliptiques de genre trois, car ces courbes rencontrent les courbes canoniques en quatre points variables. De plus, on a $p^{(1)} = 17$, $p_g = 9$.

Inversement, partons d'une surface F possèdant deux faisceaux linéaires de courbes hyperelliptiques de genre trois, deux courbes, une de chaque

---

*) Sopra le superficie di cui le curve canoniche . . . loc. cit.

**) Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1898, (5) 7, p. 234—241, 253—257.

***) Montesano, Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio. Rend. della R. Accad. di Napoli, 1895.

faisceau, se rencontrant en deux points. Alors, F peut être représentée sur un plan double π de manière qu'aux courbes de chaque faisceau correspondent des droites passant respectivement par deux points P_1, P_2. Une droite passant par P_1 (ou P_2) rencontre la courbe de diramation D, en dehors de ce point, en huit points. Entre les faisceaux de droites (P_1), (P_2) existe une correspondance $(8, 8)$, la courbe D sera donc généralement du seizième ordre et aura en P_1, P_2 des multiplicités d'indice huit. D'après les théorèmes de M. Enriques évoqués au paragraphe précédent, les courbes canoniques du plan double ayant D pour courbe de diramation, sont d'ordre cinq et possèdent deux points triples P_1, P_2. Ces courbes canoniques se décomposent donc en la droite fixe P_1P_2 et en les quartiques (elliptiques) ayant deux points doubles P_1, P_2. Les courbes canoniques de la surface F sont donc bien elliptiques doubles.

6. Il nous reste à examiner le cas où la surface F^*, qui représente l'involution avec laquelle le système canonique de F est composé, est référable, par une transformation birationnelle, à une surface réglée elliptique. Alors, F^* possède un faisceau elliptique de courbes rationnelles Γ^*. Si une courbe Γ^* a m points en commun avec une courbe C^* (correspondant à une courbe canonique C de F), il y a $2(m-1)$ courbes C^* d'un faisceau touchant une courbe Γ^*. D'autre part, les courbes Γ^* marquent sur une C^* une série elliptique γ_m de groupes de m points, D'après la formule classique de Zeuthen, il n'y a pas de points doubles de cette γ_m, par suite, il n'y a pas de courbes Γ^* touchant une courbe C^*. Mais alors, il ne peut pas y avoir de courbes C^* d'un faisceau touchant une Γ^* et on a $m = 1$. Les courbes C^* et Γ^* sont donc des unisécantes.

Aux courbes Γ^* correspondront sur la surface F des courbes hyperelliptiques Γ de genre π, formant un faisceau elliptique. Ces courbes Γ rencontrant les courbes canoniques C en des couples de points. De la relation fondamentale

$$\Gamma' \equiv \Gamma + C,$$

Γ' désignant une courbe adjointe à une Γ, on déduit $2\pi - 2 = 0 + 2$, ou $\pi = 2$. Ainsi, la surface F possède un faisceau elliptique de courbes hyperelliptiques de genre deux.

Inversement, une surface algébrique F possédant un faisceau elliptique de courbes Γ de genre deux, a ses courbes canoniques elliptiques doubles. En effet, par la propriété caractéristique des courbes canoniques celles-ci rencontrent les courbes Γ en des couples de points, ce qui démontre le théorème.

Nous avons ainsi établi complètement le théorème annoncé dans le préambule.

Morlanwelz (Belgique), 15 Décembre 1911.