Bulletin de la Classe des sciences

Construction de quelques surfaces projectivement canoniques (Seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Construction de trois surfaces projectivement canoniques, c'est-à-dire dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de surfaces projectivement canoniques

(Seconde note),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de trois surfaces projectivement canoniques, c'est-à-dire dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

Dans notre première note (¹), nous avons construit des surfaces projectivement canoniques en partant de surfaces invariantes pour des homographies de période trois. Dans cette seconde note, nous considérons des surfaces F de l'espace S_7 à sept dimensions intersections complètes de cinq hyperquadriques, invariantes pour des homographies harmoniques. Nous choisissons ces homographies de telle sorte que l'involution engendrée par l'homographie sur une surface F soit privée de points unis. Nous obtenons ainsi trois surfaces F', images d'involutions, projectivement canoniques, de genres $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$.

La première de ces surfaces s'obtient de la manière suivante : On considère, dans un espace S_{19} à 19 dimensions, deux espaces linéaires à neuf dimensions ne se rencontrant pas et dans chacun de ces espaces une variété de Veronese représentant les quadriques d'un espace à trois dimensions. La variété des droites joignant les points de ces deux variétés est coupée par les espaces

(¹) La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique, mars 1964, pp. 227-231.

à 14 dimensions ne rencontrant pas les variétés de Veronese suivant des surfaces projectivement canoniques [1].

La seconde surface est tracée sur la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions et la troisième est tracée sur la variété de Segre représentant les couples de points d'un plan et d'un espace à quatre dimensions.

Les trois surfaces représentant des involutions privées de points unis ont le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

1. Dans un espace linéaire à sept dimensions S_7 considérons l'homographie biaxiale H d'équations

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \ldots & y_r & -z_0 & -z_1 & \ldots & -z_{6-r} \\ y_0 & y_1 & & y_r & z_0 & z_1 & \ldots & z_{6-r} \end{pmatrix}.$$

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes linéaires d'équations

$$\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_r) + \psi(z_0, z_1, \ldots, z_{6-r}) = 0, \tag{1}$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques de leurs arguments, et

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iz_k = 0, \ (i = 0, 1, \ldots, r\ ;\ k = 0, 1, \ldots, 6 - r) = 0. \tag{2}$$

Le premier de ces systèmes a la dimension

$$\mathrm{R} = \binom{r+2}{2} + \binom{8-r}{2} - 1 = r^2 - 6r + 28$$

et le second la dimension

$$(r + 1)(7 - r) - 1 = 6r - r^2 + 6.$$

L'homographie H engendre une involution du second ordre dont nous obtiendrons une image en rapportant projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_R à R dimensions. Prenons pour coordonnées de cet espace

[1] Nous avons déjà signalé l'existence de cette surface dans notre note *Remarque sur les variétés algébriques à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1962, pp. 989-995).

$$Y_{ik} = y_i y_k, \qquad (i,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ r),$$

$$Z_{ik} = z_i z_k, \qquad (i,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ 6 - r).$$

Les équations de la variété V_7 image de l'involution s'obtiendront en écrivant que les déterminants

$$|Y_{ik}|, \quad |Z_{ik}| \tag{3}$$

sont de caractéristique un.

Les premières équations sont celles de la variété de Veronese Ω représentant les quadriques d'un espace à r dimensions. Elle appartient à un espace Σ à $\frac{1}{2}\, r(r+3)$ dimensions dont les équations s'obtiennent en annulant les Z. De même, les secondes équations représentent une variété de Veronese Ω' située dans l'espace Σ' à $\frac{1}{2}\,(6-r)\,(9-r)$ dimensions, représentant les hyperquadriques d'un espace linéaire à $6-r$ dimensions.

La variété V_7 est donc l'intersection du cône projetant la variété Ω de l'espace Σ' et du cône projetant Ω' de l'espace Σ. Elle est d'ordre $2^6 = 64$ et passe 2^r fois par Σ' et 2^{6-r} fois par Σ. La variété V_7 est le lieu des droites s'appuyant sur les variétés Ω et Ω'.

Pour obtenir les variétés qui correspondent dans S_R aux hyperquadriques du système (2), il suffit d'élever au carré le premier membre de leur équation. On obtient ainsi l'équation d'une hyperquadrique

$$\Sigma \lambda_{ik} \lambda_{jl} Y_{ij} Z_{kl} = 0, \quad (i, j = 0, 1, \ldots, r\,;\ k, l = 0, 1, \ldots, 6-r).$$

Cette hyperquadrique passe par les espaces Σ, Σ' et touche V_7 le long d'une variété à six dimensions d'ordre $2^6 = 64$.

2. On peut aussi, pour obtenir une image de l'involution rapporter projectivement les hyperquadriques du système (2) aux hyperplans d'un espace à $6r + 6 - r^2$ dimensions. En posant $X_{ik} = y_i z_k$, on obtiendra les équations de cette image en exprimant que la matrice

$$|X_{ik}|, \quad (i = 0,\ 1, \ldots,\ r\,;\ k = 0,\ 1, \ldots,\ 6 - r)$$

est de caractéristique un. Cette variété est la variété de Segre représentant les couples de points des axes (y) et (z) de l'homographie H. Cette variété a six dimensions. Cela provient de ce que chacun de ses points représente ∞^1 couples de l'involution, situés sur une droite s'appuyant sur les axes de H. En d'autres termes cette variété représente les droites unies de l'homographie H. Nous la désignerons par W_6^{20}.

Notons que l'involution déterminée par H sur une hyperquadrique (1) est représentée par W_6.

3. Revenons à la variété V_7 et considérons cinq hyperquadriques linéairement indépendantes. Elles ont en commun une surface F sur laquelle H détermine une involution du second ordre I. Nous supposerons que l'homographie H et les cinq hyperquadriques précédentes ont été choisies de manière que la surface F ne rencontre pas les axes de H. L'involution I est alors privée de points unis.

Les courbes canoniques de la surface F sont découpées par les hyperquadriques de l'espace S_7. Ces hyperquadriques linéairement indépendantes sont au nombre de 36. Après avoir défalqué les cinq hyperquadriques passant par F, on voit que le genre arithmétique de la surface F est $p_a = 31$. Notons que la surface F étant intersection complète est régulière et que son genre géométrique est donc $p_g = 31$.

Désignons par p_a' le genre arithmétique d'une surface F' image de l'involution I. Entre p_a et p_a' nous avons la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1),$$

d'où $p_a' = 15$. La surface F' est régulière comme F et son genre géométrique est $p_g' = 15$.

4. Supposons $r = 3$, l'homographie H ayant pour équations

$$\mathrm{H} \qquad \begin{pmatrix} y_0 & y_0 & y_2 & y_3 & -z_0 & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

et ses axes étant deux espaces à trois dimensions (y) et (z). Nous pouvons avoir deux espèces de surfaces F :

1) les surfaces F_1 intersections de cinq hyperquadriques du système (1).

2) les surfaces F_2 intersections de quatre hyperquadriques du système (1) et d'une hyperquadrique du système (2).

Nous avons démontré que le système canonique d'une surface F' image d'une involution cyclique privée de points unis appartenant à une surface F, correspond à celui des systèmes appartenant au système canonique de F, composé au moyen de l'involution, qui a la dimension minimum.

Pour une surface F_1, le système qui a la dimension minimum est découpé par les hyperquadriques du système (1) et a la dimension 14. Celui qui est découpé par les hyperquadriques du système (2) a la dimension 15.

Actuellement, les espaces Σ, Σ' ont la dimension 9 et appartiennent à un espace à 19 dimensions. La variété V est d'ordre 64 et aux hyperquadriques passant par F correspondent cinq hyperplans de S_{19} ayant en commun un espace à 14 dimensions ne rencontrant pas les variétés de Veronese Ω, Ω'. La section de V par cet espace est la surface F'.

Si l'on considère dans un espace linéaire à 19 dimensions deux espaces linéaires à 9 dimensions ne se rencontrant pas et dans chacun de ces espaces une variété de Veronese à trois dimensions, la variété lieu des droites s'appuyant sur ces deux variétés est coupée par un espace linéaire à 14 dimensions suivant une surface projectivement canonique, de genres $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$.

5. Pour une surface F_2, le système découpé par les hyperquadriques (1) a la dimension 15 et celui découpé par les hyperquadriques (2) la dimension 14. C'est donc celui-ci qui est le transformé du système canonique de la surface F'. Cette surface sera tracée sur la variété de Segre W_6^{20} de S_{15} et plus précisément sur une section hyperplane de cette variété. La variété W_6^{20} est l'image des droites s'appuyant sur les axes (y), (z) de H, axes qui sont des espaces à trois dimensions.

La surface F est donc l'intersection de quatre hyperquadriques

$$\begin{gathered}\varphi_1(y_0, y_1, y_2, y_3) + \psi_1(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad \varphi_2 + \psi_2 = 0, \\ \varphi_3 + \psi_3 = 0, \qquad \varphi_4 + \psi_4 = 0\end{gathered} \tag{4}$$

et de l'hyperquadrique

$$\Sigma a_{ik} y_i z_k = 0. \tag{5}$$

A cette dernière correspond une section hyperplane de W_6^{20}.

Les hyperquadriques (4) ont en commun une variété V_3^{16} et l'involution appartenant à cette variété a pour image une variété V_3^{64} appartenant à la variété de Segre W_6^{20}.

Observons que l'on a

$$\frac{y_0}{X_{00}} = \frac{y_1}{X_{10}} = \frac{y_2}{X_{20}} = \frac{y_3}{X_{30}} = \rho,$$

$$\frac{z_0}{X_{00}} = \frac{z_1}{X_{01}} = \frac{z_2}{X_{02}} = \frac{z_3}{X_{03}} = \rho'.$$

On peut donc écrire

$$\rho^2 \varphi_i(X_{00}, X_{10}, X_{20}, X_{30}) + \rho'^2 \psi_i(X_{00}, X_{01}, X_{02}, X_{03}) = 0,$$

d'où

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(X_{00}, \dots, X_{30}) & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \psi_1(X_{00}, \dots, X_{03}) & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{6}$$

Posons

$$\varphi_1 = \Sigma b_{ik} X_{i0} X_{k0}, \quad \psi_1 = \Sigma b'_{ik} X_{0i} X_{0k},$$
$$\varphi_2 = \Sigma c_{1k} X_{i0} X_{k0}, \quad \psi_2 = \Sigma c'_{ik} X_{0i} X_{0k}.$$

On a

$$\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = \Sigma (b_{ik} c'_{jl} - c_{ik} b'_{jl}) X_{i0} X_{k0} X_{0j} X_{0l}.$$

Or, d'après les équations de W_6^{20}, on a

$$X_{i0} X_{k0} X_{0j} X_{0l} = X_{00}^2 X_{jl} X_{kl} = X_{00}^2 X_{il} X_{kj}.$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = X_{00}^2 \Phi_{12},$$

où Φ_{12} est un polynôme du second degré par rapport aux coordonnées de l'espace S_{15}.

En refaisant le même raisonnement pour tous les déterminants tirés de la matrice (6), on voit que sur la variété W_6^{20}, la variété V_3^{64} appartient aux six hyperquadriques

$$\Phi_{12} = 0,\ \Phi_{13} = 0,\ \ldots,\ \Phi_{34} = 0.$$

Observons que les équations de ces hyperquadriques pourraient être obtenues directement par les expressions

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1,\ \varphi_1\psi_3 - \varphi_3\psi_1,\ \ldots,\ \varphi_3\psi_4 - \varphi_4\psi_3.$$

A la variété V_3^4 correspond dans S_7 la variété commune aux hypersurfaces

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = 0,\ \varphi_1\psi_2 - \varphi_3\psi_1 = 0,\ \ldots,\ \varphi_3\psi_4 - \varphi_4\psi_3 = 0,$$

c'est-à-dire la variété

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(y_0, y_1, y_2, y_3) & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \psi_1(z_0, z_1, z_2, z_3) & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{7}$$

Comme aux points de W_6^{20} correspondent les droites unies de l'homographie H, les équations précédentes représentent une variété à quatre dimensions, réglée.

Les équations (7) représentent une variété à quatre dimensions d'ordre 32 formée de la variété V_4^{16} qui correspond à V_3^4 et de seize espaces à quatre dimensions et précisément les espaces qui projettent l'axe (z) de H des huit points de l'espace (y) satisfaisant aux équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$$

et les espaces projetant l'axe (y) des huit points de l'espace (z) satisfaisant à

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4.$$

Il en résulte que la variété commune aux six hyperquadriques passant par V_3^4 contient 16 espaces à trois dimensions de W_6^{20}, huit de chaque série.

La surface F', *projectivement canonique de genres* $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$, *est située sur une section hyperplane de la variété de Segre* W_6^{20} *représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions, et sur six hyperquadriques.*

6. Supposons maintenant $r = 5$, l'homographie H ayant pour équations

$$H = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix},$$

l'axe (y) ayant quatre dimensions et l'axe (z) étant un plan.

Le système d'hyperquadriques (1) a la dimension 20 et le système (2) la dimension 14.

Considérons la surface F intersection complète de cinq hyperquadriques

$$\varphi_i(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) + \psi_i(z_0, z_1, z_2) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

du système (1). Cette surface ne rencontre pas les axes de l'homographie H et celle-ci détermine sur la surface une involution I privée de points unis.

Dans le système canonique de la surface F, il y a deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un est découpé par les hyperquadriques (1) et a la dimension 15. L'autre est découpé par les hyperquadriques du système (2) et a la dimension 14. C'est donc celui-ci qui est le transformé du système canonique de la surface F' image de l'involution I.

Pour obtenir un modèle projectivement canonique de la surface F', nous devons donc rapporter projectivement aux hyperplans d'un espace S_{14} les hyperquadriques (2). Posons comme plus haut $X_{ik} = y_i z_k$. Nous obtenons les équations exprimant que la matrice

$$|X_{ik}|, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4 \,;\, k = 0, 1, 2).$$

est de caractéristique un.

Ce sont précisément les équations de la variété de Segre W_6^{15} représentant les couples de points d'un espace à 4 dimensions (y) et d'un plan (z).

En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on voit que la surface F' appartient à dix hyperquadriques

$$\varphi_1(y_0, y_1, \ldots, y_1)\psi_2(z_0, z_1, z_2) - \varphi_2(y_0, y_1, \ldots, y_6)\psi_1(z_0, z_1, z_2)$$
$$= \Phi_{12}(X) = 0,$$

$$\Phi_{13} = 0, \;\; \Phi_{16} = 0, \;\; \ldots, \;\; \Phi_{36} = 0.$$

A la surface F', d'ordre 64 correspond dans S_7 une variété réglée à trois dimensions V_3^{32} lieu de droites unies pour l'homographie H. Cette variété appartient à la variété représentée par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(y) & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_6 & \varphi_5 \\ \psi_1(z) & \psi_2 & \psi_3 & \psi_6 & \psi_5 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Observons que l'espace (y) appartient à la variété représentée par la matrice précédente, car celle-ci s'annule pour $z_0 = z_1 = z_2 = 0$. Les équations $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, $\psi_6 = 0$, $\psi_5 = 0$ représentent cinq cônes quadratiques ayant l'espace (y) pour sommet. Celui-ci doit donc être décompté $2^5 = 32$ fois et il reste une variété d'ordre 48 contenant, outre la variété V_3^{32}, les 16 espaces à trois dimensions projetant le plan (z) des points de l'espace (y) satisfaisant aux équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_6 = \varphi_5.$$

La variété commune aux dix hyperquadriques $\Phi_{ik} = 0$ contient donc 16 plans de la variété de Segre W_6^{15}.

La surface projectivement canonique F', *de genres* $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$ *appartient à la variété de Segre* W_6^{15} *représentant les couples de points d'un espace à quatre dimensions et d'un plan, et à dix hyperquadriques.*

Liège, le 27 mars 1964.