Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LXXIV. Band 2. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Sur les surfaces algébriques possédant un faisceau elliptique de courbes de genre deux.

(Addition à la Note Math. Ann. 72, p. 426.)

Par

Lucien Godeaux à Morlanwelz (Belgique).

Je voudrais ajouter quelques mots à un article que j'ai publié ici même et dans lequel je déterminais toutes les surfaces algébriques de genre géométrique $p_g > 3$, dont les courbes canoniques sont irréductibles et elliptiques doubles (c'est-à-dire contiennent chacune une involution elliptique de couples de points)*). Parmi ces surfaces se trouve la surface F possédant un faisceau elliptique $\{\Gamma\}$ de courbes Γ de genre deux. Je n'avais pas recherché, dans mon travail cité, les valeurs des genres $p_g, p_a, p^{(1)}$ de F; une correspondance avec M. Rosenblatt m'a amené à constater que cette recherche était aisée. D'une manière précise, j'établis le théorème suivant:

Une surface algébrique possédant un faisceau elliptique de courbes de genre deux, ayant les courbes canoniques irréductibles et les genres géométrique et linéaire supérieurs à l'unité, a les genres

$$p_g = \varepsilon + 1 \text{ ou } \varepsilon, \quad p_a = \varepsilon - 1, \quad p^{(1)} = 2\varepsilon + 1,$$

ε étant un entier positif.

Le raisonnement qui me conduit à ce théorème permettrait aussi de

*) *Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles.* Math. Ann. 72 (1912), p. 426. — M. Castelnuovo m'a aimablement fait remarquer que le raisonnement par lequel je prouve que si les courbes canoniques C d'une surface ($p_g > 3$) sont elliptiques doubles, le système canonique $|C|$ est composé (n° 2), peut être simplifié par l'emploi d'un théorème qu'il a établi jadis (*Alcune osservazioni sopra le serie* . . ., Rend. R. Accad. dei Lincei, 2e sem. 1891). D'après ce théorème, un groupe de la γ_2' elliptique existant sur une C présente au plus une condition à un groupe de la série caractéristique, $\mathfrak{G}^{p^{(1)}-2}_{p^{(1)}-1}$, de C assujetti à le contenir. Par conséquent, la série caractéristique d'une courbe canonique C est composée avec l'involution γ_2' située sur cette courbe, et le système canonique $|C|$ est donc composé.

déterminer les genres $p_g, p_a, p^{(1)}$ d'une surface possédant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques.

1. Soit F une surface algébrique possédant un faisceau elliptique $\{\Gamma\}$ de courbes de genre deux Γ et dont les courbes canoniques C, de genre $p^{(1)} > 1$, sont irréductibles et forment un système $|C|$ de dimension $p_g - 1 \geqq 1$.

Une courbe Γ et une courbe C ont deux points en commun. Les courbes Γ marquent, sur une courbe C, la série elliptique $\gamma_2{}^1$ et les courbes C marquent, sur une courbe Γ, la série canonique $g_2{}^1$ de cette courbe.

Soient I_2 l'involution formée par les ∞^2 couples de points de la surface F communs aux courbes C et Γ, F^* une surface dont les points représentent les groupes de I_2. Aux courbes C correspondent sur F^* des courbes elliptiques C^* formant un système linéaire $|C^*|$ de degré $\frac{1}{2}(p^{(1)}-1)$, $p^{(1)}$ étant le genre linéaire de F; aux courbes Γ correspondent des courbes rationnelles Γ^*, formant un faisceau elliptique $\{\Gamma^*\}$ et rencontrant les courbes C^* en un point. La surface F^* est donc référable, par une transformation birationnelle, à une réglée elliptique (Théorème de Noether-Enriques).

La correspondance $(1, 2)$, ainsi établie entre les surfaces F^* et F, possède sur F^* une courbe de diramation D dont on trouve immédiatement une expression fonctionnelle.

Le nombre-base ϱ de M. Severi est égal à 2 pour les réglées irrationnelles*). Les courbes C^*, Γ^* forment donc une base de F^* et même une base intermédiaire, car le déterminant de ces deux courbes est égal à -1 Par suite, on a, λ, λ_1 et λ_2 étant des entiers,

$$\lambda D \equiv \lambda\lambda_1 \Gamma^* + \lambda\lambda_2 C^*.$$

On sait que la courbe D rencontre une Γ^* en six points, car la $g_2{}^1$ canonique d'une courbe Γ possède six points doubles. Par suite, on a $\lambda_2 = 6$ et

$$\lambda D \equiv \lambda\lambda_1 \Gamma^* + 6\lambda C^*.$$

La courbe de diramation D rencontre donc une courbe C^* en

$$\lambda_1 + 3(p^{(1)} - 1)$$

points. Appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, 2)$ existant entre la courbe elliptique C^* et la courbe (de genre $p^{(1)}$) C correspondante sur F, on trouve $p^{(1)} = 1 - \lambda_1$.

---

*) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.* Math. Ann. 62 (1906).

Le genre et le degré de D se calculent sans difficulté par des procédés bien connus, on trouve, pour le genre p

$$p = -\frac{5}{2}\lambda_1 + 1,$$

et pour le degré ν,

$$\nu = -6\lambda_1.$$

2. Pour calculer le genre arithmétique p_a de F, nous utiliserons la formule de M. Severi*) sur les correspondances entre deux surfaces. Un calcul très simple donne (le genre arithmétique de F^* étant -1)

$$p_a = -\frac{\lambda_1}{2} - 1.$$

p_a étant entier, λ_1 est pair. De plus, λ_1 est nécessairement négatif. Posons $\lambda_1 = -2\varepsilon$, ε entier positif. On aura

$$p^{(1)} = 2\varepsilon + 1, \quad p_a = \varepsilon - 1.$$

3. Reste à calculer la valeur de p_g. On a l'inégalité de M. Noether:

$$p^{(1)} \geqq 2p_g - 3,$$

par suite $p_g \leqq \varepsilon + 2$. D'autre part, l'irrégularité $p_g - p_a$ de F est au moins égale à l'unité, puisque F possède un faisceau elliptique de courbes et par conséquent au moins une intégrale de Picard de première espèce. Par suite, on a $p_g \overline{\overline{>}} \varepsilon$.

De la double inégalité

$$\varepsilon + 2 \geqq p_g \geqq \varepsilon$$

on déduit que p_g peut seulement prendre les valeurs ε, $\varepsilon + 1$, $\varepsilon + 2$.

La valeur $\varepsilon + 2$ doit être rejetée, car alors $|C^*|$ aurait la dimension $\varepsilon + 1$. Rapportant projectivement les C^* aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\varepsilon+1}$ à $\varepsilon + 1$ dimensions, on obtiendrait, dans cet espace, une règlée elliptique d'ordre ε, ce qui est impossible.**)

Il reste donc pour p_g les valeurs $p_g = \varepsilon$ et $p_g = \varepsilon + 1$.

C. Q. F. D.

Goettingen, 19 Janvier 1913.

---

*) *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica.* Rend. R. Ist. Lombardo (2) 36 (1903).

**) ε étant un entier positif est donc au moins égal à l'unité ($\varepsilon = 0$ donnerait $p^{(1)} = 1$, contre l'hypothèse). Si $\varepsilon = 1$, le système $|C^*|$ serait un réseau de degré un et les C^* seraient par suite rationnelles au lieu d'être elliptiques. En général, les C^* passant par $\varepsilon - 1$ points formeraient un réseau de degré (effectif) un, et seraient rationnelles au lieu d'être elliptiques.