Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LXXIV. Band. 3. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

# Sur les involutions de genres $p_a = P_4 = 1$ existant sur une surface algébrique de genres $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$.

Par

Lucien Godeaux à Morlanwelz (Belgique).

J'ai démontré récemment que, étant données deux surfaces algébriques de mêmes genres arithmétique $p_a > 0$ et linéaire $p^{(1)}$, de genres géométriques supérieurs à l'unité, si on a entre ces deux surfaces une correspondance rationnelle $(1, n)$, on a $p^{(1)} = 1$ et l'involution d'ordre $n$ déterminée sur l'une des surfaces par la correspondance, est cyclique. De plus, les deux surfaces ont même genre géométrique $p_g$.*)

Poursuivant mes recherches sur ce sujet, j'ai cherché à étendre le théorème précédent aux surfaces dont le genre géométrique est $p_g = 1$. J'ai notamment considéré les correspondances rationnelles $(1, n)$ existant entre une surface $F^*$ de genres $p_a = P_4 = 1$ (c'est-à-dire à courbe canonique d'ordre nul) et une surface $F$ de genres $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$ (c'est-à-dire possédant une unique courbe canonique elliptique). Alors se trouve déterminée, sur $F$, une involution $I_n$ d'ordre $n$, formée par les groupes de $n$ points de $F$ qui correspondent aux points de $F^*$. On a ce théorème:

*Une involution de genres $p_a = P_4 = 1$ existant sur une surface algébrique de genres $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$, est cyclique.*

On peut encore énoncer ce théorème sous une autre forme:

*Si on a une correspondance $(1, n)$ entre une surface algébrique à courbe canonique d'ordre nul, et une surface algébrique possédant une unique courbe*

*) *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire.* Atti della R. Accad. di Torino 48 (1912) (Séance du 17. Nov. 1912).

Pour les théorèmes de *Géométrie sur une surface algébrique* que j'emploie ici, je prie le lecteur de se reporter à la note de MM. Castelnuovo et Enriques placée à la fin du tome II de l'ouvrage de MM. Picard et Simart sur les *Fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1906) et aux travaux publiés pendant ces six dernières années par MM. Castelnuovo, Enriques et Severi.

*canonique elliptique (réductible ou non), cette deuxième surface possède une transformation birationnelle en elle-même, de période n.*

Pour plus de simplicité, je supposerai $n$ premier dans la démonstration suivante.

1. — Soit $F$ une surface algébrique de genres $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_2 > 1$. Nous savons*) que la courbe canonique $L$, unique, de $F$ est constituée par un certain nombre de courbes elliptiques isolées (c'est-à-dire n'appartenant pas à un système linéaire $\infty^1$) $L_1, L_2, \cdots, L_k$, sans points communs deux-à-deux. Les courbes bicanoniques, $2L$, forment un système linéaire de dimension $P_2 - 1 \geqq 1$, et sont composées avec les courbes elliptiques $C$ d'un faisceau linéaire $|C|$**). Chaque courbe bicanonique $2L$ sera composée de $\mu \geqq 1$ courbes totales $C$ de $|C|$ et d'un certain nombre de courbes partielles de ce faisceau; ces courbes partielles entreront comme composantes fixes dans le système bicanonique $|2L|$. Le groupe de $\mu$ courbes $C$ entrant dans la composition d'une courbe bicanonique engendre, dans le faisceau linéaire $|C|$, une série complète de dimension $\mu$. Par suite, on a $P_2 = \mu + 1$.

Parmi les courbes $L_1, L_2, \cdots, L_k$ composant la courbe canonique $L$, il y en aura nécessairement $\mu$ (par exemple les $\mu$ premières) donnant $(k \geqq \mu)$

$$C \equiv 2L_1 \equiv 2L_2 \equiv \cdots \equiv 2L_\mu.$$

Les courbes $2L_{\mu+1}, \cdots, 2L_k$ ne pourront être des courbes totales de $|C|$, mais seront des courbes partielles de ce faisceau et précisément les composantes fixes éventuelles du système bicanonique $|2L|$.

On a en effet:

$$L \equiv L_1 + L_2 + \cdots + L_\mu + L_{\mu+1} + \cdots + L_k,$$

$$2L \equiv 2L_1 + 2L_2 + \cdots + 2L_\mu + 2L_{\mu+1} + \cdots + 2L_k$$

ou

$$2L \equiv \mu C + 2L_{\mu+1} + \cdots + 2L_k.\text{***})$$

2. — Ces propriétés de $F$ étant rappelées, supposons qu'il existe sur

---

*) Des surfaces telles que $F$ ont été plusieurs fois considérées par M. Enriques, en dernier lieu dans les Rendiconti della R. Accad. di Bologna, dic. 1906.

**) Sans points-bases, car alors, par un théorème de MM. Castelnuovo et Enriques, $F$ serait référable à une surface réglée ($p_a < 0$, $P_4 = P_6 = 0$), ce qui est contre l'hypothèse.

***) Il peut se faire par exemple que l'on ait $4L_{\mu+1} \equiv C$. Alors si cette propriété ne se présente pour aucune autre des courbes $L_{\mu+2}, \cdots, L_k$, on aura pour le système quadricanonique de $F$,

$$4L \equiv (2\mu + 1)C + 4L_{\mu+2} + \cdots + 4L_k,$$

et par suite, $P_4 = 2\mu + 2$.

cette surface $F$, une involution $I_n$, d'ordre premier $n$, de genres $p_a = P_4 = 1$. Soit $F^*$ une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ représentant l'involution $I_n$. A un point de $F$ correspond donc un point de $F^*$, et inversement à un point de $F^*$ correspondent les $n$ points de $F$ formant un groupe de $I_n$.

Nous supposerons que les surfaces $F, F^*$ sont dépourvues de courbes exceptionnelles, ce qui ne restreint pas la généralité (Enriques).

L'involution $I_n$ possède, sur la surface $F$, une certaine courbe de coïncidence $D$. D'après un théorème de M. Enriques*), la courbe $D$, jointe à la transformée d'une courbe canonique de $F^*$, doit donner une courbe canonique de $F$. Or, $F^*$ possède une courbe canonique d'ordre zéro**), donc on a $D \equiv L$. Mais $L$ est l'unique courbe canonique de $F$, donc $D$ coïncide avec $L$.

Considérons une courbe quelconque $C$ du faisceau $|C|$ et les groupes de $I_n$ dont un point (au moins) appartient à cette $C$. Trois cas peuvent se présenter:

a) Ces groupes de $I_n$ ont (généralement) un point situé sur $C$ et leurs $n-1$ autres points décrivent une courbe *irréductible* $K$.

b) Ces groupes de $I_n$ ont (généralement) un point situé sur $C$ et leurs $n-1$ autres points décrivent une courbe *réductible*.

c) Ces groupes de $I_n$ ont tous leurs points situés sur $C$.

Nous allons montrer que dans les cas a), b), on est conduit à des contradictions.

3. — *Cas a).* — La courbe $K$ engendre un système continu $\{K\}$ au moins simplement infini. Une courbe $K$ quelconque rencontre certainement la courbe canonique $L$ de $F$, car autrement, elle se décomposerait en un certain nombre de courbes $C$, ce qui est contre l'hypothèse de courbes $K$ irréductibles. Par suite, l'involution elliptique $\gamma'_{n-1}$, d'ordre $n-1$, définie sur la courbe $K$ par les points des groupes de $I_n$ qui engendrent cette courbe, possède des points de coïncidences (aux intersections de $K$ avec $L$). Si nous désignons par $2\delta$ le nombre (nécessairement pair) de ces points de coïncidence et par $\pi$ le genre de $K$, nous avons, par la formule classique de Zeuthen, $\pi = \delta + 1$.

Pour calculer le degré du système $\{K\}$, considérons une courbe $K'$ adjointe à ce système. Nous avons

$$K' + L \equiv K,$$

*) *Richerche di Geometria sulle superficie algebriche.* Mem. della R. Accad. di Torino (2) 44 (1893).

**) *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Rend. della R. Accad. di Bologna, dic. 1906.

d'où nous tirons que ce degré est $2\pi - 2 - 2\delta$, c'est-à-dire zéro. Cela n'est possible que si le système $\{K\}$ est un faisceau $|K|$, de degré zéro.

Désignons par $C^*$ la courbe elliptique lieu des points de $F^*$ qui correspondent aux groupes de $I_n$ dont un point appartient à une courbe $C$. Lorsque cette courbe $C$ varie dans $|C|$, $C^*$ décrit un système continu simplement infini. Soit $\tau$ le nombre de groupes de $I_n$ ayant deux de leurs points sur une $C$; ce nombre est nécessairement fini. Les courbes $C^*$ possèdent $\tau$ points doubles et sont donc de genre virtuel $\tau + 1$; elles appartiennent ainsi à un système linéaire $|C^*|$, de genre $\tau + 1$ et de degré $2\tau$ (d'après la propriété caractéristique des surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$).

Le système linéaire $|C^*|$ a pour transformé, sur $F$, un système linéaire $|C + K|$ comprenant toutes les courbes $C + K$. Le degré de ce système est évidemment $2n\tau$. Mais, il est aussi égal à la somme des degrés de $|C|$, $|K|$ (c'est-à-dire zéro) augmentée de deux fois le nombre de points communs à une $C$ et à une $K$ génériques, c'est-à-dire $4\tau$. Par suite, on a $n\tau = 2\tau$. Cela n'est possible que pour $\tau = 0$ ou pour $\tau > 0$, $n = 2$.

Si $\tau = 0$, le faisceau $|K|$ est un multiple de $|C|$. Précisément, on a $|K| = |(n-1)C|$, c'est-à-dire qu'une courbe $K$ est composée de $n - 1$ courbes $C$ et n'est donc plus irréductible comme on l'avait supposé. Cela découle de ce que $n$ est un nombre premier.

Si $n = 2$ $(\tau > 0)$, le théorème que nous voulons établir est évident. Cependant, on peut remarquer que, dans le cas actuel, cette hypothèse $n = 2$ (avec $\tau > 0$) nous conduit à une absurdité. En effet, une courbe $K$ ne peut plus rencontrer la courbe $L$ qu'en un point de la courbe $C$ à laquelle elle correspond. Or, cela est impossible, car autrement le faisceau $|C|$ ne serait plus de degré zéro.

4. — *Cas b*). — Supposons maintenant que les groupes de $I_n$ dont un point appartient à une courbe $C$, ont leurs $n - 1$ points restants sur une courbe réductible $K$.

Soit précisément

$$K \equiv K_1 + K_2 + \cdots + K_r,$$

et soit $n_i$ le nombre de points des groupes de $I_n$ situés sur la courbe irréductible $K_i (n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n - 1)$.

Il suffit de recommencer le raisonnement fait dans le cas a) en l'étendant un peu, pour montrer que l'on a $n_i = 1$ et que la courbe $K_i$ est une courbe $C$ $(i = 1, 2, \cdots, r = n - 1)$.

Désignons par $C^*$ la courbe elliptique de $F^*$ correspondant à $C$. $C^*$ aura autant de points doubles qu'il y aura de groupes de $I_n$ ayant deux de leurs points communs à deux des courbes $C, K_1, \cdots, K_r$. Soit

$\tau$ le nombre de ces points doubles. $C^*$ a le genre virtuel $\tau + 1$ et appartient à un système linéaire $|C^*|$ de degré $2\tau$.

Soit $2\delta_i$ le nombre de points communs à $K_i$ et à $L$. Si $\delta_i = 0$, $K_i$ est une courbe de $|C|$. Si $\delta_i > 0$, l'involution $\gamma'_{n_i}$ elliptique existant sur $K_i$ possède $2\delta_i$ coïncidences, et la courbe $K_i$ à le genre $\delta_i + 1$. Mais alors, $K_i$ engendre un système de degré 0, au moins $\infty^1$, c'est-à-dire un faisceau $|K_i|$.

On peut maintenant calculer de deux manières le degré du système linéaire $|C + K_1 + K_2 + \cdots + K_r|$ transformé de $|C^*|$. On trouve

$$n\tau = 2\tau,$$

c'est-à-dire $\tau = 0$ ou $\tau > 0$, $n = 2$. Dans cette dernière hypothèse, on a déjà vu que l'on arrive à une absurdité.

On a donc nécessairement $\tau = 0$, et chaque courbe $K_i$ irréductible est une courbe $C$. Mais alors, $n$ étant premier, on a $n_i = 1$ et les groupes de $I_n$ dont un point décrit une courbe $C$, ont un point sur $n - 1$ autres courbes $C$.

Le système linéaire $|C^*|$, sur $F^*$, est un faisceau de courbes elliptiques et entre les faisceaux $|C^*|$, $|C|$, on a une correspondance $(1, n)$. Mais il y a alors $2(n-1)$ courbes totales $C$ de coïncidence pour $I_n$, ce qui est impossible, puisque la courbe de coïncidence de $I_n$ coïncide avec, qui est composée de courbes partielles de $|C|$.

Dans le cas b) nous arrivons donc à une absurdité, de même que dans le cas a).

5. — *Cas c).* — Il faut donc nécessairement que chaque courbe $C$ de $|C|$ soit le lieu de $\infty^1$ groupes de $I_n$. A chaque $C$ correspond sur $F^*$ une courbe $C^*$, nécessairement elliptique, engendrant un faisceau $|C^*|$.

Il nous suffira maintenant d'adapter au cas actuel le raisonnement développé au § 2 de notre travail déjà cité pour prouver que si la surface $F$ existe, étant donnée $F^*$, l'involution $I_n$ est cyclique.

Plaçons-nous dans un espace linéaire à quatre dimensions, de coordonnées cartésiennes $(x, y, z, u)$. Nous pourrons prendre pour modèle projectif de la surface $F^*$ la surface (possédant des courbes exceptionnelles)

$$xf(x, y, z) + y\varphi(x, y, z) = 0, \qquad u = 0, \tag{1}$$

les fonctions $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ étant rationnelles et entières en $x, y, z$. Les courbes $C^*$ sont découpées, sur la surface (1), par les plans $x - hy = 0$, en dehors de la droite $x = y = 0$. Les équations d'une courbe $C^*$ peuvent aussi se mettre sous la forme

$$u = 0, \quad x - hy = 0, \quad hf(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Soit $m$ l'ordre des courbes (2); la surface (1) sera d'ordre $m + 1$.

Comme on le sait, une courbe elliptique irréductible $C$, ayant une involution elliptique d'ordre premier $n$, $\gamma_n'$, dont les groupes sont représentés par les points de (2), peut être représentée par les équations

$$(3) \qquad x - hy = 0, \quad hf(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0, \quad u^n = H(x, y, z),$$

$H(x, y, z)$ étant un polynôme entier, irréductible, de degré $n$, tel que la surface $H(x, y, z) = 0$, $u = 0$ ait $m$ contacts $n$-ponctuels avec la courbe (1).

Les coefficients de $H(x, y, z)$ dépendent de certaines irrationnalités arithmétiques qui, a priori, peuvent varier avec $h$.

Considérons, dans un plan réel $R$, les affixes de la variable imaginaire $h$. A un point $P$ de $R$ correspondent un certain nombre $\varrho > 1$ de courbes (3) birationnellement distinctes. Une de ces courbes appartiendra à la surface $F$, dont nous supposons l'existence. Faisons décrire à $P$ un cycle fermé dans le plan réel $R$. Les $\varrho$ courbes (3) varieront d'une manière continue et se représenteront, lorsque $P$ sera revenu à sa position initiale $P_0$, dans un certain ordre qui pourra être différent du premier. Mais celle des $\varrho$ courbes (3) se trouvant sur $F$ ne se sera échangée avec aucune autre des $\varrho$ courbes, car si un tel échange se produisait, la surface $F$ n'existerait pas.

On en conclut que si la surface $F$ existe, on peut trouver un polynôme $H$ dépendant *rationnellement* de $h$. La surface $F$ est alors représentée par les équations

$$xf(xyz) + y\varphi(xyz) = 0, \qquad u^n = H\left(x, y, z, h = \frac{x}{y}\right).$$

Par suite, l'homographie périodique

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad u' = \varepsilon u,$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive $n^{\text{ieme}}$ de l'unité, laisse la surface $F$ invariante et engendre, sur cette surface, l'involution $I_n$.

Ainsi se trouve établi le théorème énoncé au début de ce travail.

Goettingen, 12 Janvier 1913.