Variétés algébriques privées de variété canonique

Lucien Godeaux

Résumé
Construction, dans un espace linéaire à n-1 dimensions, d'une hypersurface algébrique privée de variété canonique mais ayant un système bicanonique infini.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques privées de variété canonique

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction, dans un espace linéaire à n-1 dimensions, d'une hypersurface algébrique privée de variété canonique mais ayant un système bicanonique infini.

Le but de cette note est de montrer qu'il existe des variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique infini.

Nous considérons, dans un espace linéaire S_{n-1} à $n-1$ dimensions, n hyperplans situés d'une manière générale et une hypersurface d'ordre $2n-2$ passant doublement par les $\binom{n}{2}$ espaces linéaires à $n-3$ dimensions communs à deux quelconques de ces hyperplans. Nous montrons que cette hypersurface est dépourvue de variété canonique mais que le système bicanonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-4$ [1].

Nous commençons par étudier les sections de la variété considérée par des espaces à trois dimensions.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_3 à trois dimensions un n-èdre complet dont les faces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ont respectivement pour équations

$$\alpha_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,\ \alpha_2 = 0, \dots,\ \alpha_n = 0.$$

[2] Nous avons considéré le cas $n = 3$ dans une note *Sur une variété algébrique à trois dimensions à sections hyperplanes bicanoniques* (Revista de Ciencias, 1936, pp. 103-108).

Soit F une surface d'ordre $2n - 2$ passant deux fois par les $\frac{1}{2}n(n-1)$ arêtes de ce n-èdre et par conséquent trois fois par ses sommets, au nombre de $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$. Nous supposerons $n > 4$.

Si φ_2, φ_{n-2} sont des formes algébriques des n variables α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ respectivement de degrés 2, $n-2$, l'équation

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\varphi_{n-2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) +$$
$$\varphi_2(\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n, \ \alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n\alpha_1, \ldots, \ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}) = 0 \qquad (1)$$

représente une surface possédant les propriétés de F. Il faut toutefois remarquer que le second terme contient des expressions qui figurent déjà dans le premier. Le produit de deux des variables de φ_2, tel que par exemple que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 \ldots \alpha_n^2$, se trouve dans le premier terme. On peut donc supposer que l'on a

$$\varphi_2 = a_1(\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n)^2 + a_2(\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n\alpha_1)^2 + \ldots a_n(\alpha_1\alpha_2 \ \ldots \ \alpha_{n-1})^2.$$

Dans ces conditions, l'équation (1) dépend de

$$\binom{n+1}{3} + n = \frac{1}{6}n\,(n^2+5)$$

coefficients homogènes. Nous allons voir que l'on obtient ainsi la surface F la plus générale.

Soit r la dimension du système $|F|$ des surfaces F. Ces surfaces, d'ordre $2n-2$, rencontrent le plan α_1 suivant $n-1$ droites doubles, donc il y a ∞^{r-1} de ces surfaces qui contiennent le plan α_1 comme partie et sont complétées par des surfaces F_1 d'ordre $2n-3$ qui rencontrent le plan α_2 suivant $n-2$ droites doubles et suivant une droite simple $\alpha_1\alpha_2$. Il existe par suite ∞^{r-2} surfaces F contenant le plan α_2 comme partie et complétées par des surfaces F_2 d'ordre $2n-4$ qui ne passent plus par la droite $\alpha_1\alpha_2$, rencontrent le plan α_3 suivant $n-3$ droites doubles et suivant deux droites simples $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3$. Il existe donc ∞^{r-3} surfaces F_2 contenant le plan α_3 comme partie. Elles sont complétées par des surfaces F_3 d'ordre $2n-5$ qui ne passent plus par les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3$, et ainsi de suite. On parvient ainsi à ∞^{r-n} surfaces F_n, d'ordre $n-2$ ne passant plus par les arêtes du n-latère complet. Ces surfaces dépendent de $\binom{n+1}{3}$ paramètres et on a bien

$$r = \frac{1}{6}\, n\,(n^2 + 5)$$

L'équation (1), où φ_2 a la forme (2), représente donc bien la surface F la plus générale.

2. Les surfaces F′ adjointes à |F|, d'ordre $2n - 6$, passent simplement par les arêtes du n-èdre complet. Soit r' la dimension du système formé par ces adjointes. Pour évaluer r', nous supposerons d'abord $n \geqslant 6$.

Les surfaces F′ rencontrent le plan α_1 suivant $n - 1$ droites simples et suivant des courbes d'ordre $n - 5$ formant un système linéaire sans points-base. Par conséquent, les surfaces F′ passant par

$$\frac{1}{2}\,(n - 5)(n - 2) + 1 = \frac{1}{2}\,(n - 3)(n - 4)$$

points du plan α_1 contiennent ce plan comme partie et sont complétées par des surfaces F'_1 d'ordre $2n - 7$ formant un système linéaire de dimension

$$r' - \frac{1}{2}\,(n - 3)(n - 4).$$

Les surfaces F'_1 rencontrent le plan α_2 suivant $n - 2$ droites simples et suivant des courbes d'ordre $n - 5$ formant un système linéaire sans points-base. Par conséquent les surfaces F'_1 passant par $\frac{1}{2}\,(n - 3)(n - 4)$ points de α_2 contiennent ce plan comme partie et forment un système de dimension

$$r' - (n - 3)(n - 4).$$

Et ainsi de suite. On parvient ainsi à un système linéaire de surfaces d'ordre $n - 6$ de dimension

$$r' - \frac{1}{2}\, n(n - 3)(n - 4).$$

On en conclut que les adjointes F′ aux surfaces F, linéairement indépendantes, sont au nombre de

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)+\frac{1}{6}(n-3)(n-4)(n-5)\\ =\frac{1}{6}(n-3)(n-4)(4n-5).\end{aligned}\tag{3}$$

Pour $n=4$, la surface F est la surface d'Enriques et F′ est une quadrique qui devrait être circonscrite à un tétraèdre, ce qui est impossible.

Pour $n=5$, les surfaces F′ sont du quatrième ordre. Celles qui contiennent le plan α_1 sont complétées par des surfaces cubiques circonscrites à un tétraèdre, en nombre ∞^3. La dimension de F′ est donc $r'=4$.

On remarquera que la formule (3) est valable pour $n=4$ ou 5.

Le genre géométrique de la surface F *est*

$$p_g=\frac{1}{6}(n-3)(n-4)(4n-5).$$

Dans le cas $n=5$, l'équation des surfaces F′ peut s'écrire

$$\lambda_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5+\lambda_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_1+\ldots+\lambda_5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=0.$$

Dans le cas n quelconque, l'équation des surfaces F′ peut s'écrire

$$\alpha_2\alpha_3\ \ldots\ \alpha_n\psi_1+\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\alpha_1\psi_2+\ldots\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_{n-1}\psi_n=0,$$

où les ψ sont des polynomes de degré $n-5$ par rapport aux coordonnées, mais il faut remarquer que certains termes se rencontrent plusieurs fois dans cette équation.

3. Les surfaces F′ ont pour points doubles les sommets du n-èdre complet, par conséquent deux surfaces F′ se rencontrent suivant une courbe C d'ordre

$$(2n-6)^2-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(7n^2-47n+72),$$

passant simplement par les sommets du n-èdre.

Un plan passant par la droite $\alpha_1\alpha_2$ coupe les deux surfaces suivant des courbes d'ordre $2n - 7$ passant simplement par les $n - 2$ sommets du n-èdre situés sur la droite $\alpha_1\alpha_2$ et par les points de rencontre du plan avec les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ arêtes du n-èdre ne s'appuyant pas sur $\alpha_1\alpha_2$. On en conclut que la courbe C s'appuie en $3n - 12$ points sur les arêtes du n-èdre. Il faut de ces points défalquer les $n - 2$ sommets du n-èdre et par suite la courbe C rencontre les arêtes du n-èdre en $2n - 10$ points en dehors des sommets.

Si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de la surface F, une courbe C rencontre F en dehors des arêtes et des sommets du n-èdre en $p^{(1)} - 1$ points. On a donc

$$p^{(1)} - 1 = \frac{9}{2}(n-1)(n-4)^2.$$

Bien que le raisonnement précédent ne s'applique pas au cas $n = 4$, où la surface F' n'existe pas, la valeur $p^{(1)} = 1$ est donnée par la formule précédente.

Le genre linéaire de la surface F *est*

$$p^{(1)} = \frac{9}{2}(n-1)(n-4)^2 + 1.$$

La surface F est d'autre part régulière.

4. Plaçons-nous maintenant dans un espace linéaire S_{n-1} à $n - 1$ dimensions et supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient des fonctions linéaires des n coordonnées homogènes de cet espace ou, ce qui revient au même, supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient les coordonnées de cet espace.

L'équation (1) représente actuellement une hypersurface V_{n-2}^{2n-2} possédant $\frac{1}{2}n(n-1)$ espaces doubles à $n - 3$ dimensions, $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ espaces triples à $n - 4$ dimensions, ...

Les variétés canoniques éventuelles de V_{n-2}^{2n-2} sont découpées par les hypersurfaces adjointes d'ordre $n - 2$ passant simplement par les $\frac{1}{2}n(n - 1)$ espaces doubles de V_{n-2}^{2n-2}.

L'hyperplan α_1 est rencontré par une hypersurface adjointe suivant $n - 1$ espaces à $n - 3$ dimensions, donc cet espace appartient à l'hypersurface adjointe. Il en est de même des espaces $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Mais cela est absurde car l'hypersurface adjointe d'ordre $n - 2$ se décomposerait en n hyperplans.

La variété V_{n-2}^{2n-2} est dépourvue de variété canonique.

5. Les variétés bicanoniques de V_{n-2}^{2n-2} sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $2(n - 2)$ passant doublement par les espaces S_{n-3} doubles pour V_{n-2}^{2n-2}.

Ces hypersurfaces coupent l'hyperplan $\alpha_1 = 0$ suivant $n - 1$ espaces S_{n-3} doubles et par conséquent cet hyperplan fait partie de ces hypersurfaces. Il en est de même des hyperplans $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. On en conclut que le système bicanonique de V_{n-2}^{2n-2} est découpé par les hypersurfaces

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\psi_{n-4}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

ψ_{n-4} étant un polynome d'ordre $n - 4$.

Un tel système contient $\binom{2n-5}{n-4}$ coefficients et par suite

La variété V_{n-5}^{2n-4} de S_{n-1} a les genres

$$P_g = 0, \ P_2 = \binom{2n-5}{n-4}.$$

Pour $n = 5$, on voit que

La variété V_3^8 de S_4 passant doublement par les plans d'une pyramide à cinq faces est dépourvue de surface canonique et le système bicanonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

6. On peut déterminer le genre géométrique des sections hyperplanes de la variété V_{n-2}^{2n-2}.

Plaçons-nous dans un espace linéaire S_{n-2} à $n - 2$ dimensions en supposant que dans l'équation (1), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des fonctions linéaires de $n - 1$ variables homogènes. Cette équation représente alors une variété V_{n-3}^{2n-2} de S_{n-2}. Son système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-1$ de S_{n-2} passant simplement par les espaces linéaires à $n-4$ dimensions communs à deux des hyperplans $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Ces hypersurfaces ont pour équation

$$\lambda_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n + \lambda_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_n\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} = 0.$$

Par suite

Les sections hyperplanes de la variété V^{22n-}_{n-2} *ont le genre géométrique* $P_g = n$.

Liège, le 22 octobre 1963.