Bulletin de la Classe des sciences

Construction de quelques surfaces projectivement canoniques (Première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Construction, au moyen de la théorie des involutions, de quatre surfaces projectivement canoniques, c'est-à-dire dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de quelques surfaces projectivement canoniques,

(Première note)

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction, au moyen de la théorie des involutions, de quatre surfaces projectivement canoniques, c'est-à-dire dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes.

L'attention des géomètres a été plusieurs fois attirée par F. Enriques sur la détermination des surfaces dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes, surfaces que nous appelons projectivement canoniques pour les distinguer des surfaces canoniques d'une variété algébrique à trois dimensions. La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique permet de déterminer certaines de ces surfaces. Le procédé est le suivant : Considérons dans un espace linéaire S_r à r dimensions une surface F dépourvue de singularités, intersection complète de $r - 2$ hypersurfaces d'ordres $n_1, n_2, \ldots, n_{r-2}$. Les courbes canoniques de la surface F sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $p = n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-2} - (r + 1)$. Supposons que la surface F contienne une involution cyclique d'ordre p et soit F' une surface image de cette involution. Si la surface F' est dépourvue de points de diramation ou si elle ne possède que des points de diramation équivalents à un point double, on peut choisir un modèle projectif de F' qui soit projectivement canonique.

Dans cette note, nous appliquons ce procédé à la construction de :

Une surface de genre arithmétique $p_a = 17$ et de genre linéaire $p^{(1)} = 82$.

Une surface de genre arithmétique $p_a = 19$ et de genre linéaire $p^{(1)} = 82$, possédant neuf points doubles biplanaires ordinaires.

Une surface de genre arithmétique $p_a = 7$ et de genre linéaire $p^{(1)} = 28$, possédant neuf points doubles biplanaires ordinaires.

Une surface de genre arithmétique $p_a = 5$ et de genre linéaire $p^{(1)} = 28$.

Toutes ces surfaces sont régulières ($p_g = p_a$).

Pour construire ces surfaces, nous partons de la surface intersection de trois hypersurfaces cubiques de l'espace à cinq dimensions, sur laquelle les courbes canoniques sont découpées par les hypersurfaces cubiques. Remarquons que certaines des surfaces obtenues ont le diviseur de Severi égal à trois ou à neuf [1].

1. Soit, dans un espace S_5 à cinq dimensions, une homographie H, cyclique de période trois, d'équations

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon x_3 & \epsilon^2 x_4 & \epsilon^2 x_5 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité.

L'homographie H possède trois axes ponctuels, les droites

$$s_1 \quad (x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0),$$
$$s_2 \quad (x_4 = x_5 = x_0 = x_1 = 0),$$
$$s_3 \quad (x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0).$$

Le système linéaire des hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les droites s_1, s_2, s_3

(1) Pour les propriétés des involutions utilisées ici, nous renvoyons à notre monographie : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Lib. Cremonese, 1963).

s'écrit

$$\varphi_3(x_0, x_1) + \varphi_3'(x_2, x_3) + \varphi_3''(x_4, x_5) + \psi_{111}(x_0, x_1\,; x_2, x_3\,; x_4, x_5) = 0, \quad (1)$$

où φ_3, φ_3', φ_3'' sont des formes cubiques binaires de leurs arguments et ψ_{111} une forme linéaire séparément par rapport à x_0 et x_1, x_2 et x_3, x_4 et x_5.

Considérons la surface F intersection des trois hypersurfaces

$$\left.\begin{aligned}
\xi_3(x_0, x_1) + \eta_3(x_2, x_3) + \zeta_3(x_4, x_5) + \chi_{111}(x_0, x_4\,; x_2, x_3\,; x_4, x_5) = 0,\\
\xi_3'(x_0, x_1) + \eta_3'(x_2, x_3) + \zeta_3'(x_4, x_5) + \chi_{111}(x_0, x_4\,; x_2, x_3\,; x_4, x_5) = 0,\\
\xi_3''(x_0, x_1) + \eta_3''(x_2, x_3) + \zeta_3''(x_4, x_5) + \chi_{111}(x_0, x_1\,; x_2, x_3\,; x_4, x_5) = 0,
\end{aligned}\right\} (2)$$

où ξ_3, ξ_3', ξ_3'', ..., ξ_3'', χ_{111}, χ_{111}', χ_{111}'' ont des interprétations analogues à celles de φ_3, φ_3', φ_3'', ψ_{111}.

La surface F, intersection complète de trois hypersurfaces, est régulière et son système canonique est découpé par les hypersurfaces cubiques. Ses genres sont donc

$$p_a = p_g = 53, \qquad p^{(1)} = 3^5 + 1.$$

L'homographie H détermine sur la surface F une involution cyclique d'ordre trois privée de points unis. Pour obtenir une surface F′ image de cette involution, rapportons projectivement les hypersurfaces (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_{19} à 19 dimensions. Aux trois hypersurfaces (2) correspondent trois hyperplans ayant en commun un espace S_{16} à 16 dimensions. A la surface F correspond, dans ce dernier espace, une surface F′, d'ordre 81.

Le système canonique de F′ est découpé par les hyperplans de l'espace ambiant S_{16}. Entre les genres arithmétiques $p_a = 53$ de F et p_a' de F′ on a la relation

$$p_a + 1 = 3(p_a' + 1),$$

d'où $p_a' = 17$.

On obtient donc, *dans un espace linéaire à 16 dimensions, une surface de genres* $p_a = p_g = 17$, $p^{(1)} = 82$ *dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.*

Observons que F′ représentant une involution cubique privée de points unis, son diviseur de Severi est $\sigma = 3$.

2. Les équations de la surface F′ s'obtiennent aisément. Posons

$$X_{ijk} = x_i x_j x_k,$$

où i, j, k sont égaux soit à 0 et 1, soit à 2 et 3, soit à 4 et 5, ou bien où i est égal à 0 ou 1, j à 2 ou 3, k à 4 ou 5.

La surface F′ appartient aux variétés

$$\left\| \begin{matrix} X_{000} & X_{001} & X_{011} & X_{024} & X_{034} & X_{025} & X_{035} \\ X_{001} & X_{011} & X_{111} & X_{124} & X_{134} & X_{125} & X_{135} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} X_{222} & X_{223} & X_{233} & X_{024} & X_{025} & X_{124} & X_{125} \\ X_{223} & X_{233} & X_{333} & X_{034} & X_{035} & X_{034} & X_{134} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} X_{444} & X_{445} & X_{455} & X_{024} & X_{034} & X_{124} & X_{134} \\ X_{445} & X_{455} & X_{555} & X_{025} & X_{035} & X_{125} & X_{135} \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire, dans S_{16}, à des variétés à 10 dimensions, d'ordre sept.

La surface F′ appartient également à la variété qui projette, de l'espace à 11 dimensions d'équations

$$X_{024} = X_{034} = X_{124} = \ldots X_{135} = 0,$$

la variété de Segre représentant les ternes de points des droites s_1, s_2, s_3, variété d'ordre six dans un espace à sept dimensions.

3. Considérons maintenant dans l'espace S_5, l'homographie H′ cyclique de période trois d'équations

$$H' = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

homographie permutable avec $H(HH' = H'H)$.

L'homographie H′ possède trois axes ponctuels, à savoir les droites

$$s'_1 \quad (x_0 = x_2 = x_4,\ x_1 = x_3 = x_5),$$
$$s' \quad (x_0 = \epsilon x_2 = \epsilon^2 x_4,\ x_1 = \epsilon x_3 = \epsilon^2 x_5),$$
$$s' \quad (x_0 = \epsilon^2 x_2 = \epsilon x_4,\ x_1 = \epsilon^2 x_3 = \epsilon x_5).$$

La surface F_1, intersection des trois hypersurfaces cubiques

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_3(x_0, x_1) + \eta_3(x_2, x_3) + \zeta_3(x_4, x_5) + a_1 x_0 x_2 x_4 + a_2 x_1 x_3 x_5 \\
&\quad + a_3(x_0 x_2 x_5 + x_2 x_4 x_5 + x_4 x_0 x_1) + a_4(x_0 x_3 x_5 + x_2 x_5 x_1 + x_4 x_1 x_3) = 0, \\
&\zeta_3(x_0, x_1) + \xi_3(x_2, x_3) + \eta_3(x_4, x_5) + a_1 x_0 x_2 x_4 + a_2 x_1 x_3 x_5 \\
&\qquad + a_3(x_0 x_2 x_3 + \ldots) + a_4(x_0 x_3 x_5 + \ldots) = 0, \\
&\eta_3(x_0, x_1) + \zeta_3(x_2, x_3) + \xi_3(x_4, x_5) + a_1 x_0 x_2 x_4 + a_2 x_1 x_3 x_5 \\
&\qquad + a_3(x_0 x_2 x_3 + \ldots) + a_4(x_0 x_3 x_5 + \ldots) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

est transformée en soi par les homographies H et H', celles-ci engendrent sur F_1 une involution d'ordre neuf.

Observons que si l'on introduit dans les équations (3) celles de la droite s'_1, elles se réduisent à une seule

$$\begin{gathered}
\xi_3(x_0, x_1) + \eta_3(x_0, x_1) + \zeta_3(x_0, x_1) \\
+ a_1 x_0^3 + a_2 x_1^3 + 3a_3 x_0^2 x_1 + 3a_4 x_0 x_1^2 = 0,
\end{gathered}$$

de sorte que la surface F_1 rencontre la droite s'_1 en trois points. On voit de même qu'elle rencontre les droites s'_2, s'_3 chacune en trois points.

L'involution d'ordre 9 engendrée sur F_1 par H et H' est composée avec l'involution d'ordre trois engendrée par H et privée de points unis, et avec l'involution d'ordre trois engendrée par H', qui possède neuf points unis, formant trois groupes de la première involution.

Observons que l'involution d'ordre 9 considérée est également composée avec les involutions d'ordre trois engendrées par les homographies HH', H²H'. Chacune de ces involutions possède neuf points unis, formant chaque fois trois groupes de l'involution engendrée par H.

Si P est un point uni de l'involution engendrée par H' et appartenant à la droite s_1, le plan tangent à la surface F_1 en ce point s'appuie sur les droites s'_2, s'_3. Il en résulte que P est un point uni de seconde espèce, c'est-à-dire que dans le voisinage de P sur F_1, H' donne une involution binaire non identique et qu'il existe deux points infiniment voisins de P unis de première espèce pour l'involution. Les droites issues de P et passant par ces points s'appuient l'une sur s'_2, l'autre sur s'_3.

Les autres points unis de l'involution engendrée par H' et ceux des involutions engendrées par HH' et H²H' sont évidemment de même nature.

4. Les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H' et ne passant pas par les droites s_1', s_2', s_3' forment un système linéaire de dimension 19. En rapportant projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_{19} à 19 dimensions, nous obtiendrons un modèle projectif de la surface F_1' représentant l'involution engendrée sur F_1 par H'.

Le système linéaire des hypersurfaces cubiques considéré a pour équation

$$\begin{gathered}\lambda_{00}(x_0^3+x_2^3+x_4^3)+\lambda_{01}(x_0^2x_2+x_2^2x_4+x_4^2x_0)+\lambda_{02}(x_0^2x_4+x_2^2x_0+x_4^2x_2)\\ +\lambda_{03}x_0x_2x_4+\lambda_{10}(x_1^3+x_3^3+x_5^3)+\lambda_{11}(x_1^2x_3+x_3^2x_5+x_5^2x_1)\\ +\lambda_{12}(x_1^2x_3+x_3^2x_1+x_5^2x_3)+\lambda_{13}x_1x_3x_5+\lambda_{20}(x_0^2x_1+x_2^2x_3+x_4^2x_5)\\ +\lambda_{21}(x_0^2x_3+x_2^2x_5+x_4^2x_1)+\lambda_{22}(x_0^2x_5+x_2^2x_1+x_1^2x_3)\\ +\lambda_{30}(x_1^2x_0+x_3^2x_2+x_5^2x_4)+\lambda_{31}(x_1^2x_2+x_3^2x_4+x_5^2x_0)\\ +\lambda_{32}(x_1^2x_4+x_3^2x_0+x_5^2x_2)+\lambda_1(x_0x_2x_5+x_2x_4x_5+x_4x_0x_1)\\ +\lambda_2(x_0x_3x_4+x_2x_5x_1+x_4x_1x_3)=0.\end{gathered}$$

On en conclut qu'à l'ensemble des hypersurfaces (3) correspond un hyperplan S_{18} de S_{19} et la surface F_1' est située dans cet hyperplan.

La surface F_1' possède neuf points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires de la surface. Ces points sont sans influence sur le système canonique de la surface. Il en résulte que le système canonique de la surface F_1' coïncide avec celui des sections hyperplanes.

Entre le genre arithmétique $p_a = 53$ de la surface F_1 et celui p_a' de la surface F_1' nous avons la relation

$$12(p_a+1)=3.12(p_a'+1)-9.8,$$

d'où $p_a' = 19$, ce qui confirme le résultat précédent.

Le genre linéaire de la surface F_1' est $p^{(1)} = 82$.

On obtient donc *dans un espace linéaire à 18 dimensions, une surface de genres* $p_a = p_g = 19$, $p^{(1)} = 82$ *dont le système cano-*

nique et celui des sections hyperplanes coïncident. Elle possède neuf points doubles biplanaires ordinaires.

5. L'involution engendrée par H sur F_1 est représentée par une surface F_0' d'ordre 81, dans un espace S_{16} à 16 dimensions ; elle possède les mêmes propriétés que la surface F' image de l'involution engendrée sur F par H. La surface F_1' a les genres $p_a = p_g = 17$, $p^{(1)} = 82$ et est projectivement canonique.

A l'involution engendrée sur F_1 par H' correspond sur F_0' une involution I, cyclique d'ordre trois, possédant neuf points unis, à savoir : trois points provenant de l'involution engendrée sur F_1 par H', trois points provenant de l'involution engendrée par HH' et trois points provenant de l'involution engendrée par H^2H'. Chacune de ces involutions possède en effet neuf points unis formant trois groupes de l'involution engendrée par H.

Les points unis de l'involution I sont, comme les points unis dont ils proviennent, de seconde espèce.

Désignons par F'' une surface image de l'involution I. Entre le genre arithmétique $p_a = 17$ de F' et celui p_a' de F'', nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p_a' + 1) - 9.8,$$

d'où $p_a' = 7$.

Aux courbes canoniques de F'' correspondent sur F les sections de cette surface par les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H et H', ne passant pas par les droites s_1, s_2, s_3, s_1', s_2', s_3'. Ces hypersurfaces ont pour équations

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_0(x_0^3 + x_2^3 + x_3^3) + \lambda_1(x_0^2x_1 + x_2^2x_3 + x_4^2x_5) + \lambda_2(x_0x_1^2 + x_2x_3^2 + x_4x_5^2) \\ + \lambda_3(x_1^3 + x_3^3 + x_5^3) + \lambda_4x_0x_2x_4 + \lambda_5x_1x_3x_5 \\ + \lambda_6(x_0x_2x_5 + x_2x_4x_1 + x_4x_0x_3) + \lambda_7(x_1x_2x_5 + x_3x_4x_1 + x_5x_0x_3) = 0.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Elles forment un système linéaire de dimension sept. Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'une espace linéaire à sept dimensions et remarquons qu'aux trois hypersurfaces (3) correspond un hyperplan S_6 de l'espace précédent. La surface F'' appartient à cet espace S_6 et ses sections hyperplanes forment le système canonique de la surface. Le genre linéaire de celle-ci est $p^{(1)} = 28$.

On a donc *dans un espace à six dimensions une surface de genres* $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 28$, *dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.*

6. Considérons enfin, dans l'espace S_5, une surface F intersection de trois hypersurfaces cubiques ayant pour équations des équations (4) à coefficients constants. Sur cette surface, les homographies H et H' engendrent une involution d'ordre neuf privée de points unis. Entre le genre arithmétique $p_a = 53$ de F et celui p_a' de la surface F''' image de cette involution, on a la relation

$$p_a + 1 = 9(p_a' + 1),$$

d'où $p_a' = 5$.

En rapportant projectivement les hypersurfaces (4) aux hyperplans d'un espace S_7, aux trois hypersurfaces passant par F correspondent trois hyperplans ayant en commun un espace S_4 contenant F'''. On obtient ainsi *une surface de genres* $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 28$, *dans un espace à quatre dimensions, dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.*

Observons que le diviseur de Severi de F''' est $\sigma = 9$.

Liége, le 17 février 1964.