RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Estratto dal vol. XXI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 6°. — Seduta del 17 marzo 1912.

SUR LES TRANSFORMATIONS DES SURFACES ALGÉBRIQUES

LAISSANT INVARIANT

UN SYSTÈME CONTINU DE COURBES

NOTA

DI

LUCIEN GODEAUX

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1912

Matematica. — *Sur les transformations des surfaces algébriques laissant invariant un système continu de courbes.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrisp. F. ENRIQUES.

1. MM. Enriques et Fano ont établi naguère que si une surface algébrique possède une transformation projective non périodique en elle-même, elle est rationnelle ou réglée. Ce théorème permet d'affirmer qu'une surface algébrique possédant une transformation birationnelle non périodique en elle-même, laissant invariant un système linéaire de courbes de dimension >1, est rationnelle ou appartient à la classe des surfaces réglées (car au moyen du système linéaire invariant, ou d'un multiple convenable de ce système, on est ramené à une surface pour laquelle la transformation devient une transformation projective). On peut se demander s'il est possible de caractériser les surfaces qui admettent una transformation birationnelle non périodique en elle-même, laissant invariant, non plus un système linéaire de courbes, mais un système continu. La réponse est affirmative et on arrive précisément au théorème suivant:

Si une surface algébrique possède une transformation birationnelle non périodique en elle-même, T *laissant invariant un système continu de courbes qui n'est ni un faisceau de courbes elliptiques invariantes pour* T *ou pour* T^r, *ni un faisceau linéaire invariant de courbes elliptiques, cette surface est:*

1°) *rationnelle ou appartient à la classe des surfaces réglées* ($P_4 = P_6 = 0$, $p_a \leq 0$), *ou*

2°) *elle possède un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, et alors, elle est hyperelliptique* ($p_g = P_4 = 1$, $p_a = -1$), *ou elliptique* ($p_g P_4 \neq 1$, $p_a = -1$).

Les surfaces que nous excluons possèdent toutes un faisceau de courbes elliptiques, mais c'est précisément là le cas général des surfaces admettant des transformations non périodiques, car M. Enriques a montré que si une surface n'appartenant pas à la classe des réglées (rationnelles ou irrationnelles) et n'ayant pas un groupe continu de transformations birationnelles, possède une transformation birationnelle non périodique, elle possède un faisceau de courbes elliptiques, ou bien elle a tous les genres égaux à un ([1]). Remarquons cependant que notre théorème permettra de repondre à la question posée récemment par M. Severi ([2]).

Qu'il me soit permis de remercier M. Enriques, gràce aux conseils duquel j'ai pu mener à bonne fin ce travail.

2. Soit F une surface algébrique admettant une transformation birationnelle non périodique T, en elle-même. Par hypothèse, cette transformation laisse invariant un système continu de courbes $\{C\}$. Deux cas peuvent se présenter:

a) Le système $\{C\}$ est un faisceau;

b) Le système $\{C\}$ est d'indice supérieur à l'unité.

Nous traiterons d'abord ce second cas. Tout d'abord, remarquons que le système $\{C\}$ peut être supposé ne pas appartennir à un système linéaire, car celui-ci, ou un multiple convenable de celui-ci, serait au moins ∞^3 et le théorème d'Enriques-Fano serait applicable. De plus, on peut admettre que tout système linéaire $|C|$, contenu dans $\{C\}$, est au moins triplement infini. S'il en était autrement, on considérerait, au lieu de $\{C\}$, un de ses multiples convenablement choisi ([3]), certainement invariant pour T.

([1]) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali,* Rend. Accad. Lincei, 1906.

([2]) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica,* Rend. di Palermo, 1910, t. XXX.

([3]) On établit simplement qu'un multiple de $\{C\}$, $\{nC\}$ contient des systèmes linéaires, $|nC|$, au moins ∞^3, pour n assez grand. Si m et π sont les degré et genre virtuels de C, les degré et genre virtuels de nC sont respectivement

$$M = n^2 m \ , \ \Pi = n\pi + \tfrac{1}{2} n(n-1)\, m - (n-1) \, .$$

On peut choisir n suffisamment grand pour que

$$M - \Pi + 1 = \tfrac{1}{2}\, m n (n+1) - n(\pi - 1)$$

soit aussi grand qu'on le vent. Alors, par le théorème de Riemann-Roch, le système $|nC|$ a la dimension au moins égale à trois. Ajoutons que $\{C\}$ n'étant pas un faisceau, le système $\{nC\}$ est certainement irréductible.

Considérons un modèle projectif F^* de la surface F, situé dans S_3, et dont les sections planes sont des courbes C. Les transformations $T, T^2, \ldots$ vont changer ces sections planes en des courbes d'un système continu; et par conséquent, ces courbes seront découpées sur la surface F^* par des surfaces d'un même ordre μ, formant un système continu. Soient $i_1, i_2, \ldots$ les paramètres (en nombre fini) dont dépendent les surfaces de ce système continu. Les transformations $T, T^2, \ldots$ pourront évidemment être représentées par des formules

$$\begin{cases} x' = \varphi(x, y, z, i_1, i_2, \ldots), \\ y' = \psi(x, y, z, i_1, i_2, \ldots), \\ z' = \chi(x, y, z, i_1, i_2, \ldots), \end{cases}$$

les fonctions φ, ψ, χ étant d'ordre μ, et les transformations étant seulement caractérisées par les valeurs des paramètres $i_1, i_2, \ldots$

Si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation de la surface F^*, on devra avoir, par hypothèse,

$$f(\varphi, \psi, \chi) \equiv f(x, y, z).$$

De cette identification, on déduit des équations algébriques liant les paramètres $i_1, i_2, \ldots$ Les solutions de ces équations seront en nombre infini, puisque l'on a une infinité de transformations $T, T^2, \ldots$; et par conséquent, elles formeront une variété continue. Par suite, la surface F^*, ou F, aura une série continue de transformations birationnelles en elle-même.

Si cette série forme un groupe, la surface F est [1] rationnelle, ou appartient à la classe des réglées, ou bien elle est hyperelliptique, ou elliptique. Si cette série ne forme pas un groupe, la surface F est rationnelle ou référable à une réglée [2].

3. Examinons maintenant le cas où le système continu $\{C\}$ est un faisceau.

Le faisceau $\{C\}$ peut être invariant de deux façons, suivant que la transformation T change une courbe C en elle-même, on en une autre courbe C. Dans la première hypothèse, un théorème de Hürwitz permet d'affirmer que les courbes C sont rationnelles (et alors la surface F se laisse transformer en une réglée) ou elliptiques (et la surface F est du type général assigné par M. Enriques aux surfaces admettant une transformation

(1) Enriques, *Sulle superficie che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni...* Rendiconti di Palermo, 1905, t. XX.

(2) Castelnuovo ed Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche,* Annali di Matematica, 1901, ser. 3ª, t. VI.

non-périodique). Supposons donc que la transformation T change une courbe C en une autre courbe C de façon à donner une suite infinie de courbes C homologues appartenant au même faisceau. Supposons de plus que la surface F n'est ni rationnelle, ni référable par une transformation birationnelle à une surface réglée, ce qui n'enlève rien à la généralité.

Le faisceau $\{C\}$, considéré comme suite continue d'éléments (courbes), est transformé en lui-même par une transformation non périodique, et par suite, il est rationnel ou elliptique (théorème de Hürwitz).

Dans le faisceau $\{C\}$, les modules des courbes C dépendent algébriquement du paramètre du faisceau. Mais en partant d'une courbe C et appliquant successivement la transformation T, on obtient une infinité de courbes ayant les mêmes modules. Cette propriété va nous permettre de montrer que la surface F admet un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, sauf dans le cas où les courbes C sont elliptiques et le faisceau $\{C\}$ linéaire.

Distinguons deux cas, suivant que le faisceau $\{C\}$ est elliptique, ou linéaire.

Si le faisceau $\{C\}$ est elliptique, il ne peut contenir des courbes C ayant un point double (ou multiple). Supposons en effet qu'il y ait une courbe $\bar{C}$ dotée d'un point double. La courbe $\bar{C}$ est certainement invariante pour T, sans quoi on aurait, dans le faisceau, une infinité de courbes ayant le genre inférieur à celui d'une C générique, ce qui est impossible. D'autre part, une transformation non périodique donnée sur une courbe elliptique ne peut posséder de coincidences, donc la courbe $\bar{C}$ ne peut être invariante pour la transformation T, non périodique, opérant sur le faisceau elliptique $\{C\}$. Par suite, le faisceau $\{C\}$ ne possède pas de courbes ayant un point double (ou multiple). Cela étant, on déduit d'une formule donnée par MM. Castelnuovo et Enriques (loc. cit., n. 6), que l'invariant de Zeuthen-Segré de F est $I = -4$. Mais, pour la surface F, on a $p^{(1)} = 1$ (Enriques, loc. cit., Rend. Acc. Lincei): donc

$$I + p^{(1)} = 12p_a + 9 = -3,$$

et $p_a = -1$. On sait que les surfaces ayant $p_a = -1$ admettent un groupe continu de transformations birationnelles (Enriques, loc. cit., Rend. Palermo).

Passons au cas où le faisceau $\{C\}$ est linéaire, les courbes C n'étant pas elliptiques. On peut de plus supposer que le courbes C ne sont pas rationnelles, sans quoi, la surface F serait référable à une réglée.

Deux courbes C quelconques, de genre $p > 1$, ont des modules égaux, par suite il existe entre ces courbes un certain nombre de transformations birationnelles. Ce nombre est certainement fini, sans quoi les courbes C seraient elliptiques ou rationnelles. Désignons ce nombre par n. Alors, partant d'un point P d'une courbe C et construisant les conjugués sur les différentes courbes du faisceau, on obtient une courbe K, certainement transformée en elle-même par la transformation T (et par suite elliptique ou rationelle). Faisant varier le point P, on obtient un faisceau de courbes K invariantes. Remarquons que si les courbes K étaint réductibles, elles seraient composées avec les courbes d'un faisceau, lequel serait sûrement invariant pour T.

Le système $\{C + K\}$, ou un multiple convenable de ce système, donne lieu à un système continu invariant pour la transformation T, qui n'est pas un faisceau. Nous avons déjà démontré que dans ce cas, la surfaces F, si elle n'est pas référable à une réglée, possède un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même.

Ainsi se trouve complètement démontré le théorème annoncé dans le préambule.

3. Du théorème qui vient d'être établi et du théorème de M. Enriques, ou déduit que:

Si une surface algébrique de genre $p_a \geq 0$, *non rationnelle, possède une transformation birationnelle non périodique en elle-même* T, *les seuls systèmes continus* (*linéaires ou non*) *que la transformation laisse invariants peuvent être des faisceaux de courbes elliptiques invariantes* (*pour* T *ou pour* T^r) *et des faisceaux linéaires de courbes elliptiques.*