Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces minima projectives

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de quelques suites de Laplace de l'espace à cinq dimensions, associées à une surface minima projective.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

—

GEOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les surfaces minima projectives,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de quelques suites de Laplace de l'espace à cinq dimensions, associées à une surface minima projective.

A plusieurs reprises, nous avons étudié l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, nous attachant principalement au cas où il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de cette enveloppe (1). On sait, d'après un théorème de Thomsen, que dans ce cas, la surface est minima projective (2).

---

(1) *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1929, pp. 37-53), *Remarques sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Idem, 1929, pp. 702-710, *Sur une propriété de l'enveloppe de quelques familles de quadriques* (Rendiconti Accademia dei Lincei, 1° sem. 1930, pp. 52-58), *Sur la surface enveloppée par les quadriques de Lie d'une surface* (Anais Fac. Sc. Porto, 1931, pp. 1-11), *Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques* (Bull. Académie roy. de Belgique, 1911, pp. 487-498), *Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Idem, 1953, pp. 156-164), *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et sur une suite de quadriques* (Idem, 1959, pp. 676-681), *Quelques remarques sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, 1959-1960, pp. 237-245), *Recherches sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1959, pp. 91-101), *Sur l'enveloppe des quadriques attachées en un point d'une surface* (Deuxième Colloque de Géométrie différentielle du C. B. R. M., Liège, 1961, pp. 151-159). Voir aussi notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* (Actualités scient., N° 138) (Paris, Hermann, 1934).

(2) *Ueber eine liniengeometrischen Behandlungweise der projectiven Flächentheorie und die projective Geometrie der systeme von Flächen zweiter Ordnung* (Abhandlungen Mathem., Seminar Hamburg, 1925, pp. 232-266), *Sulle superficie minime proiettive* (Annali di Matematica, 1927-1928, t. V, pp. 169-184).

La méthode que nous utilisons est en liaison avec l'emploi de la suite de Laplace associée à la surface dans l'espace linéaire à cinq dimensions, en relation avec l'hyperquadrique Q de Klein. En désignant par

$$\dots, U_n, \dots, U_1 ; U ; V, V_1, \dots, V_n, \dots$$

la suite de Laplace associée dans S_5 à une surface (x) de S_3, la droite UV appartenant à Q, nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que (x) soit minima projective est qu'un point de rencontre avec Q de l'une des droites U_1U_2, V_1V_2 décrive un réseau conjugué à la congruence (U_1U_2) ou (V_1V_2) correspondante. Il en est alors de même des autres points de rencontre des deux droites avec Q. Nous plaçant dans ce cas, nous construisons les suites de Laplace associées aux nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) distinctes de cette surface.

Une surface minima projective est nappe focale de quatre congruences W. Nous construisons la suite de Laplace associée à la seconde nappe focale de chacune de ces congruences.

1. Soit (x) une surface de l'espace ordinaire rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de la surface (x). On sait que les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre et déterminent une suite de Laplace

$$\dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots \qquad \text{(L)}$$

dans laquelle chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. La suite L est autopolaire par rapport à Q en ce sens que le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et le point V_n celui de l'hyperplan $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n-1}U_{n+2}$.

Les plans UU_1U_2 et VV_1V_2 sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique de Lie Φ attachée au point x de la surface (x).

Le quadrique de Lie Φ possède cinq points caractéristiques : le point x (qui compte pour quatre) et quatre autres points que l'on construit de la manière suivante : Soient C', C'' les points de rencontre de la droite V_1V_2 avec Q et D', D'' ceux de la droite U_1U_2. Ces points représentent quatre droites formant un quadrilatère gauche : le quadrilatère de Demoulin, dont les sommets sont les points caractéristiques de Φ distincts de x.

Nous supposerons que la suite L est illimitée dans les deux sens et que les points C', C'' et D', D'' sont distincts, c'est-à-dire que les quadriques de Lie possèdent quatre points caractéristiques distincts en dehors de x.

Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques des différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie soient les courbes u, v est que l'un des points C', C'', D', D'' et par conséquent les autres décrivent des réseaux conjugués u, v. Nous nous placerons dans cette hypothèse.

Le point C' décrivant un réseau conjugué à la congruence (V_1V_2), détermine une suite de Laplace

$$\ldots,\ C'_n,\ \ldots,\ C'_1,\ C',\ C'_{-1},\ \ldots,\ C'_{-n},\ \ldots \qquad (\mathcal{C}')$$

inscrite dans la suite L et que nous désignerons par $\mathcal{C}'$. Dans cette suite, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Le point C'_1 appartient donc à la droite VV_1 et le point C'_2 à la droite UV.

Le point C'' donne de même naissance à une suite de Laplace $\mathcal{C}''$,

$$\ldots,\ C''_n,\ \ldots,\ C''_1,\ C'',\ C''_{-1},\ \ldots,\ C''_{-n},\ \ldots \qquad (\mathcal{C}'')$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Le point D' décrivant un réseau conjugué à la congruence (U_1U_2) donne naissance à une suite de Laplace $\mathcal{D}'$,

$$\ldots,\ D'_{-n},\ \ldots,\ D'_{-1},\ D',\ D'_1,\ \ldots,\ D'_n,\ \ldots \qquad (\mathcal{D}')$$

inscrite dans la suite L et dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Le point D'_1 appartient donc à la droite UU_1 et le point D'_2 à la droite UV.

De même, le point D'' donne naissance à une suite de Laplace $\mathcal{D}''$,

$$\ldots,\ D''_{-n},\ \ldots,\ D''_{-1},\ D'',\ D''_1,\ \ldots,\ D''_n,\ \ldots \qquad (\mathcal{D}'')$$

analogue à la précédente.

Les droites $C'C'_1$, $C''C''_1$, $D'D'_{-1}$, $D''D''_{-1}$ concourent en un même point A et les droites $C'C'_{-1}$, $C''C''_{-1}$, $D'D'_1$, $D''D''_1$ en un même point B. Celui-ci est le transformé de Laplace de A dans le sens des u et on a une nouvelle suite de Laplace

$$\ldots,\ A_n,\ \ldots,\ A_1,\ A,\ B,\ B_1,\ \ldots,\ B_n,\ \ldots,$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Nous avons montré que cette suite de Laplace était doublement inscrite dans le polyèdre de Laplace formé par les plans déterminés par trois points consécutifs de la suite L. Le plan VV_1V_2, par exemple, contient le point A et le point B_3.

2. La droite $C'D'$ joignant deux points conjugués par rapport à Q appartient à cette hyperquadrique. Désignons par c', d' les droites de S_3 représentées par ces points. Le point $c'd'$ est caractéristique pour la quadrique de Lie et les tangentes en ce point à la surface $(c'd')$, nappe de l'enveloppe de Φ, sont représentées par les points de la droite $C'D'$. Il existe donc sur cette droite deux points U^{11}, V^{11} représentant les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface $(c'd')$. Ces points se correspondent dans une suite de Laplace L^{11},

$$\ldots,\ U^{11}_n,\ \ldots,\ U^{11}_1,\ U^{11},\ V^{11},\ V^{11}_1,\ \ldots,\ V^{11}_n,\ \ldots \qquad (L^{11})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Nous allons construire les points de cette suite.

Le point C' décrivant un réseau conjugué à la droite $C'D' = U^{11}V^{11}$, la suite de Laplace $\mathcal{C}'$ est inscrite dans la suite L^{11}. Le point C'_1 appartient à la droite $U^{11}U^{11}_1$, le point C'_2 à la droite $U^{11}_1U^{11}_2$ et d'une manière générale, le point C'_n appartient à la droite $U^{11}_{n-1}U^{11}_n$. D'autre part, le point C'_{-1} appartient à la droite $V^{11}V^{11}_1$, le point C'_{-2} à la droite $V^{11}_1V^{11}_2$, ..., le point C'_{-n} à la droite $V^{11}_{n-1}V^{11}_n$.

De même, la suite de Laplace $\mathcal{D}'$ est inscrite dans la suite de Laplace L^{11}. Le point D'_1 appartient à la droite $V^{11}V^{11}_1$, le point D'_2 à la droite $V^{11}_1V^{11}_2$, ..., le point D'_n à la droite $V^{11}_{n-1}V^{11}_n$. Le point D'_{-1} appartient à la droite $U^{11}U^{11}_1$, le point D'_{-2} à la droite $U^{11}_1U^{11}_2$, ..., le point D'_{-n} à la droite $U^{11}_{n-1}U^{11}_n$.

Il résulte de ce qui précède que le point U^{11} est l'intersection des droites $C'_1D'_{-1}$ et $C'D'$, le point U^{11}_1 celle des droites $C'_1D'_{-1}$ et $C'_2D'_{-2}$, ..., le point U^{11}_n celle des droites $C'_{n-1}D'_{-n-1}$. Le point V^{11} est l'intersection des droites $C'D'$ et $C'_{-1}D'_1$, le point V^{11}_1, celle des droites $C'_{-1}D'_1$ et $C'_{-2}D'_2$, ..., le point V^{11}_n l'intersection des droites $C'_{-n-1}D'_{n-1}$ et $C'_{-n}D'_n$.

Ainsi se trouve construite la suite L^{11} en partant des suites $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}'$.

Appelons c'',d'' les droites de S_3 représentées par les points C'', D''. On peut répéter le raisonnement qui vient d'être fait pour les nappes $(c'd'')$, $(c''d')$, $(c''d'')$ de l'enveloppe des quadriques de Lie Φ. On définira ainsi trois suites de Laplace L^{12}, L^{21}, L^{22} que l'on construira d'une manière analogue à celle de L^{11}.

Les plans $U^{11}U^{11}_1U^{11}_2$ contient les points $C'_1D'_{-1}C'_2D'_{-2}$ et le plan $V^{11}V^{11}_1V^{11}_2$ les points $C'_{-1}D'_1C'_{-2}D'_2$. Ces deux plans sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans sont des coniques représentant les systèmes de génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique de Lie Φ^{11} attachée à la surface $(c'd')$ au point $c'd'$. La surface (x) est une nappe de l'enveloppe des quadriques de Lie Φ^{11} car si on désigne par c'_2, d'_2 les droites de S_3 représentées par les points C'_2, D'_2, Φ^{11} contient ces droites. Il en résulte qu'il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface $(c'd')$, c'est-à-dire que cette surface est minima projective.

On arrive à des conclusions analogues pour les surfaces $(c'd'')$, $(c''d')$, $(c''d'')$.

3. Les droites c'_2, d'_2, c''_2, d''_2 correspondant respectivement aux points C'_2, D'_2, C''_2, D''_2 engendrent des congruences W dont (x) est une nappe focale. Nous montrerons comment on peut déterminer la seconde nappe focale d'une de ces congruences, par exemple de la congruence (c'_2). Mais auparavant, il importe de rappeler une propriété des congruences W que nous avons établie [1].

Soit (j) une congruence W ayant pour nappes focales deux

---

[1] *Sur la théorie des congruences IV* (Bull. de l'Académie roy. de Belgique, 1954, pp. 1028-1037), *Sulle congruenze IV* (Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 1956, pp. 36-45).

surfaces (x), $(\bar{x})$. A chacune de ces surfaces correspond dans S_5 une suite de Laplace L pour (x), $\bar{L}$ pour $(\bar{x})$, la première contenant les points..., U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, ..., la seconde les points ..., $\bar{U}_2$, $\bar{U}_1$, $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, ... La droite j est représentée par un point J commun aux droites UV, $\bar{U}\bar{V}$. Elle engendre un réseau u, v conjugué aux congruences engendrées par ces droites. La suite de Laplace déterminée par J est inscrite dans les suites L et $\bar{L}$. Elle comprend le point J_1 commun aux droites UU_1, $\bar{U}\bar{U}_1$, le point J_2 commun aux droites U_1U_2, $\bar{U}_1\bar{U}_2$, le point J_{-1} commun aux droites VV_1, $\bar{V}\bar{V}_1$, le point J_{-2} commun aux droites V_1V_2, $\bar{V}_1\bar{V}_2$, ... Le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j est représenté par l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$. Nous avons montré que le pôle de cet hyperplan est le point P intersection des droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$. Le point P décrit un réseau conjugué u, v ; ses transformés de Laplace dans le sens des u sont le point P_1 intersection des droites UU_1 et $\bar{U}\bar{U}_1$, le point P_2 intersection des droites U_1U_2 et $\bar{U}_1\bar{U}_2$,..., ses transformés de Laplace dans le sens des v sont le point P_{-1} intersection des droites VV_1 et $\bar{V}\bar{V}_1$, le point P_{-2} intersection des droites V_1V_2 et $\bar{V}_1\bar{V}_2$, ...

Retournons maintenant à notre problème.

La droite c' engendre une congruence W dont les nappes focales sont les surfaces $(c'd')$, $(c'd'')$. Le complexe linéaire osculateur à cette congruence le long de la droite c' est représenté par l'hyperplan $C'_2C'_1C'C'_{-1}C'_{-2}$ et son pôle par rapport à Q est le point P intersection des droites $U^{11}U^{12}$, $V^{11}V^{12}$, les point U^{12}, V^{12} appartenant à la suite de Laplace L^{12} attachée à la surface $(c'd'')$.

Dans le sens des v, il correspond à l'hyperplan $C'_2C'_1C'C'_{-1}C'_{-2}$ l'hyperplan $C'_3C'_2C'_1C'C'_{-1}$ dont le pôle est le point P_1 intersection des droites $V^{11}V^{12}$ et $V_1^{11}V_1^{12}$. Au dernier hyperplan correspond dans le sens des v l'hyperplan $C'_4C'_3C'_2C'_1C'$ dont le pôle est le point P_2 intersection des droites $V_1^{11}V_1^{12}$ et $V_2^{11}V_2^{12}$. Or, ce dernier hyperplan représente le complexe linéaire osculateur à la congruence (c'_2) le long de la droite c'_2. Par conséquent, si nous appelons $(\bar{x})$ la surface seconde nappe focale de la congruence (c'_2), les points $\bar{U}$, $\bar{V}$ secondes intersection de Q avec les droites P_2U, P_2V, représentent les tangentes à $(\bar{x})$ aux courbes u, v au point $\bar{x}$. La connaissance de ces points implique celle de la surface $(\bar{x})$. La droite $\overline{UV}$ passe par le point C_2'.

4. Les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ se correspondent dans une transformation de Laplace et donnent naissance à une suite de Laplace $\overline{L}$,

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots$$

analogue à la suite L. On peut construire les points de cette suite de la manière suivante :

Désignons par

$$\ldots, P_n, \ldots, P_2, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots$$

la suite de Laplace à laquelle appartient les points P, P_1, P_2, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des v.

Le point $\overline{V}_1$ appartient à la droite $\overline{V}C_1'$ et à la droite P_1P. Le point $\overline{V}_2$ appartient aux droites $\overline{V}_1C'$ et PP_{-1}. Plus généralement, le point $\overline{V}_n$ appartient à la droite $\overline{V}_{n-1}C_{n+1}'$ et à la droite P_{-n+2} P_{-n+1}.

De même, le point $\overline{U}_1$ appartient à la droite $\overline{U}C_3'$ et à la droite P_3P_4, le point $\overline{U}_2$ à la droite $\overline{U}_1C_4'$ et à la droite P_4P_5. Plus généralement, le point $\overline{U}_n$ est l'intersection des droites $\overline{U}_{n-1}C_{n+3}'$ et $P_{n+2}P_{n+3}$.

On observera que le plan $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$ contient le point C', donc la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ attachée au point $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$ contient la droite c'. Le point C' décrivant un réseau conjugué u, v, il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie $\overline{\Phi}$ de la surface $(\bar{x})$. Par suite, les secondes nappes focales des congruences (c_2'), (d_2'), (c_2''), (d_2'') sont des surfaces minima projectives.

Liège, le 7 janvier 1963.