Bulletin de la Classe des sciences

Sur un théorème de Darboux concernant les congruences W

Lucien Godeaux

Résumé
Démonstration géométrique du théorème de Darboux suivant lequel les coordonnées d'une droite engendrant une congruence W satisfont à une équation de Laplace.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur un théorème de Darboux concernant les congruences W,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Démonstration géométrique du théorème de Darboux suivant lequel les coordonnées d'une droite engendrant une congruence W satisfont à une équation de Laplace.

On sait que Darboux, dans le tome II de ses *Leçons sur la théorie générale des Surfaces* (Paris, Gauthier-Villars, 1889) a démontré que les coordonnées de la droite génératrice d'une congruence W satisfont à une équation de Laplace. Cela revient à dire que sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5, les droites r, $\bar{r}$ représentant les tangentes aux surfaces focales de la congruence en deux points correspondants, se coupent en un point J décrivant un réseau conjugué aux congruences (r), $(\bar{r})$. C'est sous cette forme que nous exposons une démonstration géométrique du théorème de Darboux.

1. Soit (j) une congruence W dont nous désignerons les surfaces focales par (x), $(\bar{x})$, ces surfaces ayant les asymptotiques homologues u, v.

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 représentant les tangentes aux courbes u, v en un point x de (x) et par $\bar{U}$, $\bar{V}$ ceux qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v en un point $\bar{x}$ de $(\bar{x})$, la droite $x\bar{x}$ appartenant à la congruence (j).

Les droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ appartiennent à Q et se coupent en un point J image de la droite j. Il s'agit de démontrer que le point J décrit un réseau (u, v), nécessairement conjugué aux congruences (UV), $(\bar{U}\bar{V})$.

Soit U_1 le transformé de Laplace de U dans le sens des v et $\bar{U}_1$ celui de $\bar{U}$ dans le même sens.

La droite JJ^{01} tangente à la courbe v tracée sur la surface (J) au point J est l'intersection des plans VUU_1, $\bar{V}\bar{U}\bar{U}_1$.

Supposons que les droites UU_1, $\bar{U}\bar{U}_1$ se coupent en un point J_1, appartenant donc à la droite JJ^{01}.

La tangente en J_1 à la courbe u tracée sur la surface (J_1) est l'intersection des plans U_1UV, $\bar{U}_1\bar{U}\bar{V}$; elle coïncide donc avec la droite J_1J.

Il en résulte que les points J, J_1 sont transformés de Laplace l'un de l'autre et par conséquent le point J décrit un réseau conjugué (u, v) aux congruences (UV), $(\bar{U}\bar{V})$. Dans ce cas, le théorème est démontré.

2. Supposons maintenant que les droites UU_1, $\bar{U}\bar{U}_1$ ne se rencontrent pas. Désignons par X le point de rencontre de UU_1 avec JJ^{01} et par $\bar{X}$ celui de $\bar{U}\bar{U}_1$ avec cette droite.

La tangente en X à la courbe u tracée sur la surface (X) se trouve dans le plan U_1UV et coupe la droite UV en un point X_1. De même, la tangente en $\bar{X}$ à la courbe u tracée sur la surface $(\bar{X})$ appartient au plan $\bar{U}_1\bar{U}\bar{V}$ et coupe la droite $\bar{U}\bar{V}$ en un point $\bar{X}_1$.

La droite JJ^{01} engendre une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe v tracée sur la surface (J), le plan tangent à cette développable étant le plan $JJ^{01}J^{02}$. Les droites XX_1, $\bar{X}\bar{X}_1$ appartiennent à ce plan.

Le plan $JJ^{01}J^{02}$ contenant les points J et X_1, contient la droite UV ; il contient les points U, X donc la droite UU_1. De même le plan $JJ^{01}J^{02}$ contient les droites $\bar{U}\bar{V}$ et $\bar{U}\bar{U}_1$. Mais alors, les plans VUU_1 et $\bar{V}\bar{U}\bar{U}_1$ coïncident, ce qui est absurde.

Les droites UU_1 et $\bar{U}\bar{U}_1$ doivent donc se rencontrer et le théorème est démontré.

Observons que la réciproque du théorème de Darboux est immédiate.

Liège, le 23 juillet 1963.