Bulletin de la Classe des sciences

# Un cas de fermeture d'une suite de Laplace

Lucien Godeaux

**Résumé**
Examen du cas où la suite de Laplace attachée dans un espace à cinq dimensions à une surface de l'espace ordinaire se termine dans un sens en présentant le cas de Laplace, le point de fermeture décrivant une courbe qui appartient à un espace à trois dimensions.

**Citer ce document / Cite this document :**

Godeaux Lucien. Un cas de fermeture d'une suite de Laplace. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 49, 1963. pp. 851-855;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1963.65825;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1963_num_49_1_65825;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

# Un cas de fermeture d'une suite de Laplace

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — Examen du cas où la suite de Laplace attachée dans un espace à cinq dimensions à une surface de l'espace ordinaire se termine dans un sens en présentant le cas de Laplace, le point de fermeture décrivant une courbe qui appartient à un espace à trois dimensions.

A une surface $(x)$ de l'espace ordinaire, rapportée à ses asymptotiques $u$, $v$, on attache dans un espace $S_5$ à cinq dimensions une suite de Laplace L :

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$. M. Bompiani a démontré que si la suite L s'arrête au point $U_n$ en présentant le cas de Laplace, elle s'arrête au point $V_{n+2}$ en présentant le cas de Goursat, à condition que la courbe $(U_n)$ n'appartienne pas à un hyperplan (1). Il a également considéré les cas où la courbe $(U_n)$ appartient à un espace de dimension inférieure à cinq. C'est à un de ces cas que nous voudrions consacrer cette note et apporter quelques compléments aux résultats de M. Bompiani en profitant du fait que la suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q de Klein.

(1) BOMPIANI, *Sull' equazione di Laplace* (RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, 1912, t. 34, pp. 383-407).

Nous considérons précisément le cas où la courbe $(U_n)$ appartient à un espace à trois dimensions et nous montrons que la suite L se termine au poinr $V_{n+1}$ en présentant également le cas de Laplace, le lieu du point $V_{n+1}$ étant la droite conjuguée par rapport à l'hyperquadrique Q de l'espace contenant la courbe $(U_n)$

Nous utilisons les notations et les résultats de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* [1].

1. Soit $(x)$ une surface de l'espace ordinaire rapportée à ses asymptotiques $u$, $v$. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de $S_5$ représentant les tangentes aux lignes $u$, $v$ en un point $x$ de $(x)$. On sait que ces points appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$.

Supposons que la suite L s'arrête au point $U_n$ en présentant le cas de Laplace et que la courbe $(U_n)$, où la variable est $v$, soit située dans un espace à trois dimensions R'.

Nous désignerons par $r$ la droite conjuguée de l'espace R' par rapport à l'hyperquadrique Q. Dans la polarité par rapport à Q, à un plan osculateur $\rho' = U_n U_n^{01} U_n^{02}$ à la courbe $(U_n)$ correspond un plan $\rho$ passant par $r$ et variable avec $v$ ; à une tangente $r' = U_n U_n^{01}$ à la courbe $(U_n)$ correspond un espace à trois dimensions R variable avec $v$.

Le pôle d'un hyperplan $U_{n-1} U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03}$ est un point $V_{n+1}$ appartenant à la droite $r$. La suite de Laplace L se termine donc dans le sens des $u$ au point $V_{n+1}$.

2. Désignons par $\Sigma$ un hyperplan passant gar R'. Nous allons montrer que cet hyperplan ne peut couper la surface $(U_{n-1})$ suivant une courbe $u$.

Supposons en effet qu'il en soit autrement et soit $v_0$ la valeur de $v$ qui fixe la courbe $u$ envisagée. Une tangente à cette courbe en un point $U_{n-1}$ appartient à $\Sigma$ et par conséquent le point

[1] Actualités scient., N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

$U_{n-2}$ homologue de $U_{n-1}$ appartient à $\Sigma$. Il en est de même de la courbe $u$ de la surface $(U_{n-2})$ donnée par $v = v_0$. La tangente à cette courbe $u$ en un point $U_{n-2}$ appartient à $\Sigma$ et par conséquent la courbe $u$ donnée par $v = v_0$ sur la surface $(U_{n-3})$ appartient à $\Sigma$. Et ainsi de suite.

Dans ces conditions, le point $V_{n+1}$ de $r$ pôle de $\Sigma$ est aussi le pôle des espaces $U_n^{02}U_n^{01}U_nU_{n-1}U_{n-2}$, $U_n^{01}U_nU_{n-1}U_{n-2}U_{n-3}$, ... et les points $V_n$, $V_{n-1}$, ... de la suite L coïncident avec $V_{n+1}$, ce qui est absurde.

L'espace $\Sigma$ passant par $R'$ varie donc avec $u$ et lorsque $u$ varie, le point $V_{n+1}$ décrit la droite $r$.

3. L'hyperplan $U_n^{02}U_n^{01}U_nU_{n-1}U_{n-2}$ a pour pôle par rapport à Q un point $V_n$ appartenant au plan $\rho$ conjugué du plan $\rho' = U_n^{02}U_n^{01}U_n$ osculateur à la courbe $(U_n)$. Lorsque $u$ varie, le point $V_n$ décrit une courbe $u$ de la surface $(V_n)$ et les tangentes à cette courbe coupent la droite $r$ aux points $V_{n+1}$ homologues.

Considérons une courbe $v$ tracée sur la surface $(V_n)$ et soit $u_0$ la valeur de $u$ qui fixe cette courbe. A la valeur $u_0$ de $u$ correspond un point $V_{n+1}$ de $r$ bien déterminé. Un plan $\rho$ coupe la courbe $v$ envisagée en un point $V_n$ et la tangente en ce point à la courbe $u$ du plan $\rho$ passe par le point $V_{n+1}$. On voit donc que les tangentes aux courbes $u$ de la surface $(V_n)$ aux points d'une courbe $v$ forment un cône dont le sommet $V_{n+1}$ appartient à $r$. La suite L se termine au point $V_{n+1}$ en présentant le cas de Laplace.

*Si la suite de Laplace* L *se termine au point* $U_n$ *en présentant le cas de Laplace et si la courbe* $(U_n)$ *appartient à un espace à trois dimensions, la suite* L *se termine au point* $V_{n+1}$ *en présentant également le cas de Laplace et le lieu du point* $V_{n+1}$ *est la droite conjuguée par rapport à l'hyperquadrique* Q *de l'espace contenant la courbe* $(U_n)$.

4. Ajoutons quelques remarques.

L'espace $U_n^{01}U_nU_{n-1}U_{n-2}U_{n-3}$ a pour pôle un point $V_{n-1}$ appartenant à l'espace R conjugué de la droite $U_nU_n^{01}$ tangente à la courbe $(U_n)$. Lorsque $u$ varie, ce point $V_{n-1}$ décrit une courbe $u$ tracée sur la surface $(V_{n-1})$. On voit donc que les courbes $u$ de la surface $(V_{n-1})$ se trouvent dans des espaces à trois dimensions.

L'espace $U_n U_{n-1} U_{n-2} U_{n-3} U_{n-4}$ a pour pôle un point $V_{n-2}$ appartenant à l'hyperplan polaire du point $U_n$ et on voit que les courbes $u$ de la surface $(V_{n-1})$ appartiennent à des hyperplans.

Par contre, les courbes $u$ de la surface $(V_{n-3})$ ne peuvent appartenir à des hyperplans.

Enfin, si nous fixons une valeur de $u$, c'est-à-dire un point $V_{n+1}$, de $r$, nous fixons un hyperplan $\Sigma$ passant par $R'$ et cet hyperplan coupe la surface $(U_{n-1})$ suivant une courbe $v$. Les courbes $v$ de la surface $(U_{n-1})$ sont donc situées dans les hyperplans passant par $R'$.

5. Nous allons maintenant supposer que la suite L se termine au point $U_n$ suivant le cas de Laplace mais que le lieu de ce point est une droite $r'$. Nous montrerons que la suite L se termine au point $V_{n-1}$ en présentant également le cas de Laplace, la courbe $(V_{n-1})$, lorsque $u$ varie, appartenant à un espace à trois dimensions. Ce sera en quelque sorte la réciproque du cas précédent.

Désignons par R l'espace à trois dimensions conjugué de la droite $r'$ par rapport à Q. Le pôle de l'hyperplan $U_n^{01} U_n U_{n-1} U_{n-2} U_{n-3}$ est un point $V_{n-1}$ qui appartient à R.

Considérons une courbe $v$ correspondant à la valeur $u_0$ de $u$, tracée sur la surface $(U_{n-1})$. Les tangentes à cette courbe rencontrent $r'$ et par conséquent cette courbe est située dans un plan $\rho'$ passant par $r'$ [1].

Les tangentes à la courbe $v$ correspondant à la valeur $u = u_0$ de la surface $(U_{n-2})$ rencontrent le plan $\rho'$, donc cette courbe est située dans un espace à trois dimensions $R'$ passant par $\rho'$.

On voit de même que la courbe $v$ donnée par $u = u_0$ sur la surface $(U_{n-3})$ se trouve dans un hyperplan passant par $R'$. Cet hyperplan reste fixe lorsque $v$ varie et son pôle $V_{n-1}$ par rapport à Q ne dépend donc que de $u$ et décrit, lorsque $u$ varie, une courbe $(V_{n-1})$ appartenant à l'espace R.

---

[1] Nous utilisons le fait que dans un espace à $n$ dimensions, si les tangentes à une courbe s'appuyent sur un espace à $\nu$ dimensions, cette courbe est située dans un espace à $\nu + 1$ dimensions contenant évidemment l'espace précédent.

On voit qu'aux espaces $U_n^{01}U_nU_{n-1}U_{n-2}$ correspondent les tangentes à la courbe $(V_{n-1})$ et qu'aux plans $U_n^{01}U_nU_{n-1}$ correspondent les plans osculateurs à la même courbe.

Considérons, sur la surface $(V_{n-2})$ une courbe $v$ correspondant à la valeur $u_0$ de $u$. Pour cette valeur, un point $V_{n-1}$ est fixé. Il en résulte que les tangentes aux courbes $u$ aux points de la courbe $v$ considérée passent par le point $V_{n-1}$ et que la suite L se termine au point $V_{n-1}$ en présentant le cas de Laplace.

Si la suite de Laplace L se termine au point $U_n$ en présentant le cas de Laplace et si le lieu du point $U_n$ est une droite, la suite L se termine au point $V_{n-1}$ en présentant également le cas de Laplace et le lieu du point $V_{n-1}$ est une courbe qui appartient à l'espace à trois dimensions conjugué par rapport à l'hyperquadrique Q de la droite lieu du point $U_n$.

Liége, le 1er août 1963.