Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces liées à des suites de Laplace terminées dans les deux sens

Lucien Godeaux

Résumé
Propriétés de surfaces telles que la suite de Laplace qui leur est associée dans un espace à cinq dimensions se termine dans les deux sens en présentant le cas de Laplace.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Surfaces liées à des suites de Laplace terminées dans les deux sens,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Propriétés de surfaces telles que la suite de Laplace qui leur est associée dans un espace à cinq dimensions se termine dans les deux sens en présentant le cas de Laplace.

Dans une communication au Symposium de Syracuse en 1961, nous avons considéré une surface attachée à une suite de Laplace terminée dans les deux sens (1). D'une manière précise, nous avons considéré une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, telle que la suite de Laplace qui lui est attachée dans l'espace à cinq dimensions, se termine aux points U_n, V_n en présentant chaque fois le cas de Laplace. Le point U_n ne dépend que de v et le point V_n que de u. La courbe (U_n) appartient à un plan ξ et la courbe (V_n) à un plan η ; ces deux plans sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q de Klein. En général, les plans ξ et η ne se rencontrent pas et c'est dans cette hypothèse que nous nous sommes placé. Dans cette note, nous complétons notre étude en considérant les cas où les plans ξ, η se rencontrent en un point, ou suivant une droite, ou sont confondus.

(1) *Sopra una superficie legata ad una successione di Laplace chiusa* (CELEBRAZIONI ARCHIMEDEE DEL SECOLO XX, volume I, Simposio di Geometria differenziale, pp. 73-78. Siracusa, 1961). Voir aussi *Sur une surface liée à une suite de Laplace terminée dans les deux sens* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1961, pp. 1085-1091). Nous utilisons les notations de notre exposé *La Théorie des surfaces et l'espace réglé*. ACTUALITÉS SCIENT., N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Pour $n = 1$, les asymptotiques u, v de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires et on retrouve des résultats de M. Terracini qui, comme on sait a déterminé toutes les surfaces en question et en a donné les équations [1].

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Nous supposons que la suite de Laplace de l'espace S_5 déterminée par les points qui représentent sur l'hyperquadrique Q de Klein les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x), est limitée aux points U_n, V_n en présentant chaque fois le cas de Laplace. Cette suite est donc formée des points

$$U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n.$$

Le point U_n ne dépend que de v et le point V_n que de u. Il convient de remarquer que U_n, V_n dépendent effectivement de v et de u. Supposons en effet que U_n par exemple ne dépende pas de v, c'est-à-dire soit fixe. L'hyperplan polaire Σ de U_n par rapport à Q est fixe. Cet hyperplan contient les points V_{n-2}, V_{n-1} quels que soient u, v. Mais alors la suite de Laplace attachée à la surface (x) appartiendrait à l'espace à quatre dimensions Σ, ce qui est impossible.

Soient U_n^{01}, U_n^{02} les points dérivés de U_n et V_n^{10}, V_n^{20} ceux qui sont dérivés de V_n. Les plans $\xi = U_n U_n^{01} U_n^{02}$ et $\eta = V_n V_n^{10} V_n^{20}$ sont conjugués par rapport à Q et sont fixes. La courbe (U_n) appartient à ξ et la courbe (V_n) à η. Le plan ξ coupe Q suivant une conique γ_ξ et le plan η suivant une conique γ_η.

Les points des coniques γ_ξ, γ_η représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_n, qui reste fixe lorsque u, v varient. Elle fait partie de l'enveloppe des quadriques Φ_{n-1} attachées aux points x.

En général, les plans ξ, η ne se rencontrent pas et c'est dans cette hypothèse que nous nous sommes placé dans les notes

(1) *Sulle congruenze W di cui una falda focale è una quadrica* (Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio, Torino, 1918), *Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe* (Atti della Soc. Nat. et Mat. di Modena, 1919), *Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari* (Atti della Acad. di Torino, 1924). *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari.* Appendice IV à la *Geometria proiettiva differenziale* de G. Fubini et E. Čech (tome II, Bologne, Zanichelli, 1927).

citées plus haut. Nous allons maintenant nous placer dans les cas opposés.

2. Supposons donc que les plans ξ, η se rencontrent en un et un seul point P. Ce point étant son propre conjugué par rapport à Q, appartient à cette hyperquadrique et l'hyperplan tangent à Q en P est déterminé par les plans ξ, η. Chacun de ces plans est tangent à Q en P et par conséquent chacune des coniques γ_ξ, γ_η dégénère en deux droites passant par P.

Désignons par c', c'' les droites du plan η formant la conique γ_η et par d', d'' celles qui forment la conique γ_ξ du plan ξ. Ces quatre droites passent donc par P.

Les points de chacune des droites c', c'' sont conjugués par rapport à Q de chacune des droites d', d'', donc les plans $c'd'$, $c'd''$, $c''d'$, $c''d''$ appartiennent à Q. Ils représentent soit des gerbes de rayons, soit des plans réglés. Nous supposerons, pour fixer les idées, que le plan $c'd'$ représente une gerbe de rayons de sommet P_1.

Rappelons que deux plans appartenant à Q et représentant deux gerbes de rayons ont en commun un et un seul point. Il en est de même de deux plans représentant des plans réglés. Par contre un plan représentant une gerbe de rayons et un plan représentant un plan réglé ne se rencontrent pas en général, mais s'ils se rencontrent, c'est suivant une droite.

On en conclut que le plan $c''d''$ représente une gerbe de sommet P_2, le plan $c'd''$ un plan réglé ϖ_1 et le plan $c'd''$ un plan réglé ϖ_2. Si p est la droite représentée par le point P, les points P_1, P_2 appartiennent à p et les plans ϖ_1, ϖ_2 passent par p.

La droite c' représente le faisceau de rayons (P_1, ϖ_1), la droite c'' le faisceau de rayons (P_2, ϖ_2), la droite d' le faisceau de rayon (P_1, ϖ_2), enfin la droite d'' le faisceau de rayons (P_2, ϖ_1). La quadrique Φ_n dégénère comme quadrique-lieu en le couple de plans ϖ_1, ϖ_2 et comme quadrique-enveloppe en le couple de gerbes de rayons de sommets P_1, P_2.

Considérons la quadrique Φ_{n-1} dont les génératrices rectilignes sont représentées par les sections de Q par les plans $U_{n-1}U_nU_n^{01}$, $V_{n-1}V_nV_n^{10}$.

La quadrique Φ_{n-1} et la quadrique dégénérée Φ_n ont en commun les droites représentées par les points communs aux droites $U_nU_n^{01}$ et d', d'', ainsi que les droites représentées par les intersections de $V_nV_n^{10}$ et c', c''. Ces points représentent quatre droites situées une dans chacun des faisceaux de rayons (P_1, ϖ_1), (P_1, ϖ_2), (P_2, ϖ_1), (P_2, ϖ_2).

On en conclut que *les quadriques Φ_{n-1} passent par les points* P_1, P_2 *et touchent chacun des plans ϖ_1, ϖ_2 en un point variable.*

3. Supposons maintenant que les plans ξ, η aient en commun une droite p. Chaque point de cette droite étant son propre conjugué par rapport à Q, elle appartient à cette hyperquadrique.

Les plans ξ, η appartiennent à un espace à trois dimensions π qui est le conjugué de p par rapport à Q et par conséquent cet espace touche cette hyperquadrique le long de p. Il en résulte que les coniques γ_ξ, γ_η dégénèrent en la droite p comptée deux fois.

La droite p représente un faisceau de rayons (P, ϖ) de centre P et de plan ϖ. L'espace π touchant Q le long de p, coupe Q suivant deux plans ϖ_1, ϖ_2, passant par p. L'un de ces plans, par exemple ϖ_1, représente la gerbe de sommet P et l'autre représente le plan réglé ϖ. Actuellement la quadrique Φ_n considérée comme quadrique-lieu dégénère en le plan ϖ compté deux fois et considérée comme quadrique-enveloppe, en la gerbe de sommet P comptée deux fois.

Une quadrique Φ_{n-1} touche la quadrique dégénérée Φ_n suivant deux droites représentées par les points de rencontre de p avec les droites $U_nU_n^{01}$ et $V_nV_n^{10}$. On en conclut que *les quadriques Φ_{n-1} passent par* P *en y touchant le plan ϖ et que ce point compte pour quatre parmi les points caractéristiques de ces quadriques.*

4. Supposons enfin que les plans ξ, η coïncident en un plan qui appartient nécessairement à Q, puisque chacun de ses points est son conjugué. Ce plan représente soit un plan réglé, soit une gerbe de rayons. On supposera $n > 1$, les points U_1, V_1 ne pouvant appartenir à Q.

Pour simplifier les notations, nous désignerons par p' la droite $U_nU_n^{01}$ et par p'' la droite $V_nV_n^{10}$. Désignons par P le point commun aux droites p', p''.

Supposons en premier lieu que le plan $\xi = \eta$ représente un plan réglé ϖ.

La droite p' représente un faisceau de rayons (P', ϖ) et la droite p'' un faisceau de rayons (P'', ϖ) du plan ϖ. La droite $P'P''$ représente le point P.

Le plan $U_{n-1}U_nU_n^{01}$ coupe Q suivant la droite p' et suivant une seconde droite q'. De même, le plan $V_{n-1}V_nV_n^{10}$ coupe Q suivant p'' et une seconde droite q''.

La quadrique Φ_{n-1} dégénère comme quadrique-lieu en deux plans ϖ, ϖ' et comme quadrique-enveloppe en deux gerbes de rayons de sommets P', P''.

A la section de Q par le plan $U_{n-1}U_nU_n^{01}$ correspondent deux faisceaux de rayons (P', ϖ) et (P'', ϖ') ; à celle de Q par le plan $V_{n-1}V_nV_n^{10}$ correspondent deux faisceaux de rayons (P', ϖ'), (P'', ϖ), ϖ' étant le plan réglé qui correspond au plan $q'q''$, qui appartient à Q. Il en résulte que les droites q', q'' doivent passer par P.

Désignons par p_0', p_0'' les droites des faisceaux (P', ϖ), (P'', ϖ) qui correspondent respectivement à U_n, V_n et par q_0', q_0'' les droites des faisceaux (P', ϖ') et (P'', ϖ') qui correspondent respectivement aux points de rencontre de q' avec $U_{n-1}U_n$ et de q'' avec $V_{n-1}V_n$. La quadrique Φ_{n-1} contient les droites p_0', p_0'', q_0', q_0'' ; elle passe par P', P'' et touche le plan fixe ϖ en un point variable et le plan mobile ϖ' en un point.

Supposons maintenant que le plan $\xi = \eta$ représente une gerbe de rayons de sommet P_0. Au point P correspond une droite p passant par P_0 et aux droites p', p'' correspondent des faisceaux de rayons (P_0, ϖ'), (P_0, ϖ''), les plans ϖ', ϖ'' passant par p.

Aux droites q', q'' correspondent des faisceaux de rayons (P_1, ϖ''), (P_1, ϖ'), le point P_1 appartenant à p. Les droites q', q'' doivent donc passer par P.

Appelons comme plus haut p_0', p_0'' les droites qui correspondent à U_n, V_n, q_0', q_0'' les droites qui correspondent aux points d'intersection de q' avec $U_{n-1}U_n$ et de q'' avec $V_{n-1}V_n$. La quadrique Φ_{n-1} passe par les droites p_0', p_0'', q_0', q_0'' et donc par les points P_0, P_1.

5. Supposons $n = 1$. Les asymptotiques de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires Σ_u, Σ_v. On sait que ces surfaces ont été étudiées par M. Terracini et on retrouve des propriétés qu'il a établies.

Les complexes Σ_u, Σ_v appartiennent à des réseaux $|\Sigma_u|$, $|\Sigma_v|$, les secondes images de ces complexes étant les points des plans ξ, η. Un complexe Σ_u et un complexe Σ_v sont en involution.

Dans le cas où les plans ξ, η ne se rencontrent pas, on obtient le cas général.

Si ξ et η se rencontrent en un point, chacun des réseaux $|\Sigma_u|$, $|\Sigma_v|$ a pour base deux faisceaux de rayons et précisément les faisceaux (P_0, ϖ') et (P_1, ϖ'') pour le réseau $|\Sigma_u|$ et (P_0, ϖ''), (P_1, ϖ') pour le réseau $|\Sigma_v|$.

Si ξ et η se rencontrent suivant une droite, les complexes Σ_u, Σ_v contiennent un faisceau de rayons compté deux fois.

Les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q, de sorte que les plans ξ, η sont certainement distincts.

Liège, le 18 mars 1963.