SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES CONTENANT UN SYSTÈME LINÉAIRE SIMPLE DONT CHAQUE COURBE POSSÈDE UNE INVOLUTION DE TERNES DE POINTS

PAR

LUCIEN GODEAUX
à Morlanwelz, Belgique

M. CASTELNUOVO, considérant les surfaces algébriques possédant un réseau simple de courbes hyperelliptiques, est arrivé au résultat suivant (1):

Si une surface algébrique contient un réseau simple de courbes hyperelliptiques de genre p, *cette surface est rationnelle ou référable (par une transformation birationnelle) à une réglée de genre* p.

La démonstration de M. CASTELNUOVO s'étend sans peine au cas où l'on considère des surfaces algébriques contenant un réseau simple de courbes dont chacune possède une involution γ'_2 de couples de points (2).

En cherchant à étendre le théorème de M. CASTELNUOVO aux surfaces contenant un système linéaire de courbes dont chacune possède une involution γ'_3 de ternes de points, je suis arrivé au théorème suivant:

Si une surface algébrique contient un système linéaire simple, triplement infini, de courbes dont chacune possède une involution de ternes de points, cette surface est rationnelle, ou référable (par

---

(1) *Su le superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche.* Rend. R. Accad. dei Lincei, 1894 (1.° sem.).

(2) Voir par exemple ma note *Sur les surfaces algebriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles.* Math. Annalen, 1912, Bd. LXXII.

une transformation birationnelle) à une reglée, ou enfin c'est une surface hyperelliptique de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$).

C'est la démonstration de ce théorème qui fait l'objet de cette note.

1. Soit F une surface algébrique que nous supposerons dépourvue de points singuliers (ce qui est toujours possible pourvu que l'on suppose que cette surface est située dans un espace d'au moins cinq dimensions). Soit sur F un système linéaire simple triplement infini de courbes algébriques $|C|$ de genre p.

Par hypothèse chaque courbe C de ce système $|C|$ contiendra une involution γ'_3 de ternes de points de genre π.

Le système $|C|$ ayant été supposé simple, la série caractéristique d'une courbe C ne sera en général pas composée avec la γ'_3 que contient cette courbe.

Considérons un point P de F qui ne soit pas un point-base de $|C|$, et les courbes C passant par P. Elles forment un réseau et sur chacune d'elles se trouvent définis deux points qui, avec P, forment un terne de l'involution que contient la courbe considérée. On a ainsi une variété V doublement infinie de couples de points. Deux hypothèses peuvent être faites :

a) Les couples de V sont situées sur une courbe Γ, ou bien

b) Ces couples de points remplissent toute la surface.

Examinons séparément ces hypothèses.

2. Plaçons nous d'abord dans l'hypothèse *a)*.

La courbe Γ est rationnelle. En effet, chaque courbe C passant par P, rencontre Γ en dehors de P, en deux points. Par ces deux points il ne peut d'ailleurs passer qu'un nombre fini de courbes C passant aussi par P, car autrement, $|C|$ serait composé. Par suite les courbes C passant par P formant un réseau, elles découpent sur la courbe Γ une g_2^2 et Γ est donc rationnelle. Lorsque le point P varie sur la surface, on obtient une famille au moins simplement infinie de conrbes Γ.

Considérons l'une de ces courbes Γ, soit Γ_0. Lorsque le point P varie sur Γ_0, les courbes Γ relatives peuvent :

1.°) se confondre avec Γ_0, ou bien

2.°) se confondre en une même courbe Γ_1 différente de Γ_0

3.°) ou enfin être toutes distinctes.

Lorsque le premier cas se présente, une courbe Γ quelconque passe nécessairement simplement par le point P auquel elle correspond, et par suite ces courbes Γ forment un faisceau, Chacune de ces courbes rencontre d'ailleurs une courbe C arbitraire en un groupe de l'involution γ'_3 qu'elle contient. Par suite, le faisceau $\{\Gamma\}$ formé par les Γ est de genre π. Par le théorème de Noether-Enriquès, la surface F possédant un faisceau de genre π de courbes rationnelles Γ, est référable à une réglée de genre π ($P_4 = P_6 = 0$, $p_a = -\pi$).

Lorsque le second cas se présente, une courbe Γ ne passe évidemment plus par le point P auquel elle correspond. Considérons la courbe Γ_0 et la courbe Γ_1 relative à l'ensemble des points de Γ_0, et supposons que la courbe Γ_1 est irréductible. Cette courbe Γ_1 rencontre une courbe C quelconque en deux points. Par suite, Γ_0 rencontre aussi une C quelconque en deux points. Mais alors, Γ_1 devrait rencontrer une C arbitraire en quatre points, car à chaque point commun à cette C et à Γ_0 en correspondent deux de Γ_1. Par suite le courbe Γ_1 est réductible et se compose de deux courbes Γ', Γ'_1 rencontrées chacune en un seul point par une courbe C arbitraire. Les courbes telles que Γ' sont donc rationnelles. De plus ces courbes forment un faisceau. En effet pour construire celles de ces courbes passant par un point P, on commencera par construire le couple de courbes Γ', Γ'_1 correspondantes à ce point; alors on sait qu'a l'ensemble des points de Γ', il correspond un couple de courbes dont l'une est Γ'_1 et l'autre l'unique courbe de cette famille passant pat P.

Le faisceau formé par les courbes Γ' a évidemment le même genre p que les courbes C et par suite, F est référable à une réglée de genre p ($P_4 = P_6 = 0$, $p_a = -p$).

Enfin, lorsque le troisième cas se présente, les courbes Γ sont en nombre doublement infini, et la surface F est rationnelle ($p_a = P_2 = 0$).

3. Passons à l'examen de l'hypothèse *b)*.

Considérons un faisceau de courbes C passant par le point P. Les couples de points de ces courbes qui avec P forment des ternes des involutions γ'_3 relatives à ces courbes, engendrent une courbe hyperelliptique D. La considération des ∞^2 faisceaux de courbes C assujeties à la condition de passer par P fournit un système continu doublement infini $\{D\}$ de courbes hyperelliptiques D.

Désignons toujours par V l'ensemble des couples de points situés sur les courbes C passant par P et qui forment avec P des groupes des involutions γ'_3 situées sur ces courbes.

Deux faisceaux de courbes C situés dans le réseau des courbes C passant par P ont une courbe C en commun, par suite les deux courbes D relatives se rencontrent en un couple de V, précisément celui qui est situé sur cette dernière courbe C.

L'ensemble V est d'ailleurs rationnel, car à une courbe du réseau des C passant par P correspond un seul couple de V et réciproquement. Rapportons donc les couples de V aux points d'un plan. A une courbe D correspond une courbe rationnelle de ce plan et deux pareilles courbes n'ont qu'un point variable en commun. Par suite au système $\{D\}$ correspond un système homaloïde du plan considéré, et $\{D\}$ est donc un réseau $|D|$. On en conclut qu'un couple de points de V est complèment déterminé par un de ses points, c'est-à-dire que V est une involution de couples de points, ou encore une transformation birationnelle involutive de F en elle-même.

En considérant les ∞^2 points de la surface F, on obtient une double infinité d'involutions V. Deux de ces involutions ne peuvent d'ailleurs jamais coïncider, par suite F possède ∞^2 transformations birationnelles en elle-même et est donc, d'après un théorème de M.M. Castelnuovo et Enriques (1), rationnelle, ou référable à une réglée, ou est une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$).

Le théorème énoncé au début de ce travail est donc complètement démontré.

Liège, 8 Novembre 1912.

(1) *Sur les surfaces algebriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes*. C. R., 1895, t. cxxi.