Bulletin de la Classe des sciences

Remarque sur les surfaces non rationnelles de genres zéro

Lucien Godeaux

Résumé

Détermination de systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique de genres Pa = Pg = O, P2 ≥ 3, dont le système bicanonique est irréductible.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarque sur les surfaces non rationnelles de genres zéro,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination de systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 \geqslant 3$, dont le système bicanonique est irréductible.

Dans quelques travaux récents [1], nous avons étudié les surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 \geqslant 3$ dont le système bicanoniques est irréductible. Une telle surface étant, comme nous l'avons montré, l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 1$, a le diviseur de Severi pair et en général égal à deux. Cette dernière propriété est d'ailleurs immédiate. Dans cette courte note, nous montrons l'existence de certains systèmes linéaires dont les doubles appartiennent à des systèmes pluricanoniques.

1. Soit F une surface de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible. Nous supposerons que le bigenre de F est $P_2 \geqslant 3$, le genre linéaire $p^{(1)} = \pi$ ayant la même valeur.

[1] *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1959, pp. 362-372, 1960, pp. 47-52, 743-747, 1961, pp. 1118-1127) ; *Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles* (JOURNAL DE MATH. PURES ET APPLIQUÉES, 1960, pp. 221-230).

Nous avons démontré qu'il existe sur F une courbe algébrique isolée Γ de genre π et de degré $\pi - 1$ telle que la courbe 2Γ soit une courbe bicanonique sans que Γ soit une courbe canonique. Le système bicanonique $|C_2|$ découpe sur Γ une série paracanonique $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$.

Le système tricanonique est $|C_3| = |\Gamma + \Gamma'|$ et le système tétracanonique

$$|C_4| = |2\Gamma'| = |2C_2| = |4\Gamma|.$$

On a donc

$$2\Gamma' \equiv 4\Gamma, \tag{1}$$

mais, $|\Gamma'|$ et $|2\Gamma|$ étant des systèmes linéaires distincts obtenus en divisant par deux le système $|C_4|$, le diviseur de Severi de F est pair et en général égal à deux.

Observons que de (1) on déduit

$$\Gamma' + \Gamma'' \equiv 3\Gamma + \Gamma',$$

d'où

$$\Gamma'' \equiv 3\Gamma.$$

2. Désignons par $|C_m|$ le système m-canonique de F. Puisque le diviseur de Severi de la surface est $\sigma = 2$, il existe sur F un système linéaire $|\overline{C}_m|$ tel que

$$|2C_m| = |2\overline{C}_m| = |C_{2m}|.$$

les systèmes $|C_m|$, $|\overline{C}_m|$ provenant de la division du système $|C_{2m}|$ par deux.

De la relation (1) on déduit

$$|C_2| = |2\Gamma|, \quad |\overline{C}_2| = |\Gamma'|.$$

Nous avons

$$|\overline{C}_2'| = |\Gamma''| = |3\Gamma|$$

et d'autre part

$$C_6 \equiv 2C_3 \equiv 2\Gamma + 2\Gamma' \equiv 6\Gamma, \quad 2\overline{C}_2' \equiv 6\Gamma \equiv C_6.$$

Donc on a $|\overline{C}_3| = |3\Gamma|$.

Considérons les systèmes $|C_{2n}| = 2n\Gamma|$.

Nous avons

$$|C_{2n+1}| = |C'_{2n}| = |(2n - 1)\Gamma + \Gamma'|,$$
$$|C_{2n+2}| = |C'_{2n+1}| = |(2n - 1)\Gamma + \Gamma''| = |(2n + 2)\Gamma|.$$

Considérons d'autre part le système $|2n\Gamma + \Gamma'|$. On a

$$2C_{2n+2} \equiv (4n + 4)\Gamma \equiv 4n\Gamma + 2\Gamma',$$

donc

$$|\overline{C}_{2n+2}| = |2n\Gamma + \Gamma'|.$$

L'adjoint au système $|\overline{C}_{2n}|$ est

$$|\overline{C}'_{2n}| = |2(n - 1)\Gamma + \Gamma''| = |(2n + 1)\Gamma|.$$

Comme on a

$$2\overline{C}'_{2n} \equiv 2(2n + 1)\Gamma \equiv 2C_{2(2n+1)},$$

on en déduit

$$|\overline{C}_{2n+1}| = |(2n + 1)\Gamma|.$$

On voit donc qu'il existe à côté de la suite des systèmes pluricanoniques $|C_2|, |C_3|, \dots$ une suite de systèmes $|\overline{C}_2|, |\overline{C}_3|, \dots$ tels que

$$|2C_n| = |2\overline{C}_n|.$$

Les systèmes $|C_n|$ et $|\overline{C}_n|$ ont évidemment les mêmes caractères : degré, genre et dimension.

Liège, le 31 décembre 1962.