Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des surfaces d'asymptotiques *u,v* telles que les surfaces réglées gauches lieu des tangentes aux courbes *v* aux points d'une courbe *u* appartiennent à des complexes linéaires.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination des surfaces d'asymptotiques u,v telles que les surfaces réglées gauches lieu des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u appartiennent à des complexes linéaires.

A une surface (x) dont les asymptotiques sont des courbes u, v (ou $v = C^{te}$, $u = C^{te}$), on peut attacher quatre familles de surfaces réglées : les développables S_u, S_v dont les arêtes de rebroussement sont respectivement les courbes u, v, les réglées R_u lieux des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u et les réglées R_v lieux des tangentes aux courbes u aux points d'une courbe v. Les réglées R_u, R_v sont gauches.

Les surfaces (x) dont les développables S_u, ou S_v, ou les deux appartiennent à des complexes linéaires ont été considérées depuis longtemps et d'ailleurs complètement déterminées par M. Terracini [1]. Au contraire, les surfaces (x) dont les réglées R_u, ou R_v, ou les deux appartiennent à des complexes linéaires n'ont fait l'objet que de quelques rares travaux [2]. C'est de ces surfaces que nous allons nous occuper ici.

[1] M. Terracini a résumé ses recherches dans l'appendice IV, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari* du traité G. FUBINI et E. CECH, *Geometria proiettiva differenziale* (Bologna, Zanichelli, 1927), Tome II, pp. 771-782.

[2] Nous avons appelé l'attention sur ces surfaces dans une communication au Colloque de Géométrie différentielle du C.B.R.M. tenu à Louvain en 1951 : *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée* (Paris, Masson, 1951, pp. 191-203). M. VINCENSINI avait rencontré une surface rentrant dans ce type dans un mémoire *Sur certaines surfaces à lignes de courbure planes* (ANNALES DE

C. Segre a montré qu'une congruence W dont une nappe focale est une surface réglée gauche a comme seconde nappe focale, si elle n'est pas réglée, une surface dont les asymptotiques d'une mode appartiennent à des complexes linéaires (1). G. Fubini a ensuite établi qu'une surface dont les asymptotiques d'une mode appartiennent à des complexes linéaires peut toujours être considérée comme nappe focale d'une congruence W dont la seconde nappe focale est une surface réglée gauche (2). Notre but est d'établir des théorèmes analogues pour les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires.

Pour abréger, nous appelerons surface A une surface dont les asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires et surface B une surface dont les réglées gauches R_u appartiennent à des complexes linéaires.

Tout d'abord, on voit assez facilement que si une surface A est nappe focale d'une congruence W, la seconde nappe focale est une réglée gauche, ou une surface A ou, en général, une surface B. Nous montrons qu'inversement une surface B étant donnée, elle peut toujours être considérée comme nappe focale d'une congruence W dont la seconde nappe focale est une surface A.

Pour établir ce théorème, nous utilisons la représentation des surfaces par des suites de Laplace d'un espace à cinq dimensions en liaison avec l'hyperquadrique Q de Klein représentant les droites de l'espace (3).

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1941, pp. 141-164). Voir aussi du même auteur, *Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires* (C. R., 3 novembre 1954). M. G. BOL les a également considérées dans son ouvrage *Projektive Differential-Geometrie* (Goettingen, 1954). Voir aussi nos notes : *Alcune osservazioni sulle congruenze W* (RENDICONTI DEL SEMINARIO DI TORINO, 1953-54, pp. 39-48), *Sur les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires* (ABHANDLUNGEN AUS DEM MATEMATISCHEN SEMINAR, Hamburg, 1955, pp. 57-63).

(1) *Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate* (ATTI DELLA R. ACCADEMIA DI TOTINO, 1913-14, pp. 257-269 ; OPERE, vol. II, pp. 119-129.

(2) G. FUBINI et E. CECH, *Geometria proiettiva-differenziale (loc. cit.)*, tome I, p. 280. La démonstration de Fubini est analytique, une démonstration géométrique a été donnée par M. TERRACINI, Appendice IV au tome II.

(3) Nous utilisons les notations et les résultats de notre exposé *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé*. ACTUALITÉS SCIENT., N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v, dont les réglées gauches R_u, lieux des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u, appartiennent à des complexes linéaires. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein représentant les tangentes aux courbes u, v en un point x de (x). Ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre et déterminent une suite de Laplace L,

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, autopolaire par rapport à Q en ce sens que le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et V_n celui de l'hyperplan $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Une réglée R_u est représentée par une courbe u tracée sur la surface (V). Par hypothèse cette courbe doit appartenir à un hyperplan. En d'autres termes, l'hyperplan osculateur à une courbe u en un point V de cette courbe doit rester fixe lorsque u varie. Or, cet hyperplan est déterminé par les points $VV_1V_2V_3V_4$ et a pour pôle par rapport à Q le point U_2. Ce point doit donc rester fixe lorsque u varie et ne dépend par conséquent que de v.

Observons que U_2 dépend effectivement de v, car s'il était fixe, la surface (x) appartiendrait à une complexe linéaire, ce qui est impossible.

Considérons une courbe u sur la surface(U_1). Les tangentes aux courbes v aux différents points de cette courbe forment un cône dont le sommet est le point U_2. La suite de Laplace L s'arrête donc au point U_2 en présentant le cas de Laplace.

Le point V_4 est le pôle de l'hyperplan $U_2U_2^{01}U_2^{02}U_2^{03}U_2^{04}$ osculateur à la courbe (U_2) au point U_2 ; il ne dépend donc que de v. La droite V_3V_4 est la conjuguée par rapport à Q de l'espace $U_2U_2^{01}U_2^{02}U_2^{03}$ et ne dépend donc que de v. Elle est tangente à la courbe (V_4) et la suite de Laplace L se termine au point V_4 en présentant le cas de Goursat [1].

---

[1] M. E. Bompiani a démontré que si la suite de Laplace L s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace, elle s'arrête au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. Voir son mémoire *La Geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1926, pp. 395-400 ; 2° sem. 1926, pp. 262-267).

La suite de Laplace L associée à une surface B *se termine au point* U_2 *en présentant le cas de Laplace et au point* V_4 *en présentant le cas de Goursat.*

2. Rappelons maintenant quelques résultats que nous avons obtenu sur les congruences W [1].

Supposons qu'une surface (x) soit une nappe focale d'une congruence W : (j). Avec nos notations habituelles, nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0.$$

La droite j est représentée par un point

$$J = \lambda U - \mu V$$

de la droite UV et on peut choisir le rapport de proportionnalité des coordonnées pour avoir

$$\mu^{10} + 2b\,\lambda = 0, \quad \lambda^{01} + 2a\,\mu = 0.$$

Cela étant, considérons un espace linéaire à six dimensions S_6 contenant l'espace S_5 de la suite L. Désignons par 0 le point de la pyramide de référence de S_6 opposé à l'espace S_5, les autres sommets de cette pyramide de référence étant ceux de la pyramide de référence de l'espace S_5. Comme coordonnées projectives homogènes d'un point P′ de S_6, nous prendrons celles du point P, projection de P′ à partir de 0 et une septième quantité.

Considérons le point U′ dont les coordonnées sont celles de U et μ, et le point V′ dont les coordonnées sont celles de V et λ. Nous avons

$$U'^{10} + 2bV' = 0, \quad V'^{01} + 2aU' = 0$$

et les points U′, V′ sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent à une suite de Laplace L′,

$$\ldots, U'_n, \ldots, U'_1, U', V', V'_1, \ldots, V'_n, \ldots \qquad (L')$$

dont la projection à partir de 0 sur S_5 est la suite L.

Si l'on désigne par

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{J})$$

[1] Voir notre travail du Colloque de Louvain cité plus haut (nº 2).

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, la suite de Laplace inscrite dans la suite L et déterminée par J, on voit que le point J_n est l'intersection des droites $U_{n-1}U_n$ et $U'_{n-1}U'_n$ et le point J_{-n} celle des droites $V_{n-1}V_n$ et $V'_{n-1}V'_n$.

Supposons maintenant que la suite L se termine au point U_n en présentant le cas de Laplace et au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. Il en est de même de la suite L'.

Pour les points U_n, U'_n, deux cas peuvent se présenter :

1) Les points U_n, U'_n sont distincts. Alors le point J_{n+1} existe et est l'intersection des droites $U_nU_n^{01}$ et $U'_nU'^{01}_n$. La suite $\mathcal{J}$ se termine au point J_{n+1} en présentant le cas de Laplace.

2) Le point U'_n coïncide avec le point U_n. Le point J_n coïncide avec le point U_n et la suite $\mathcal{J}$ se termine au point J_n en présentant le cas de Laplace.

Pour les points V_{n+2}, V'_{n+2} deux cas peuvent également se présenter :

1) Les points V_{n+2}, V'_{n+2} sont distincts. Le point $J_{-(n+2)}$ appartient à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$. S'il est variable avec u, sur cette droite, le point $J_{-(n+3)}$ existe et coïncide avec V_{n+2}. S'il est indépendant de u, la suite J se termine au point $J_{-(n+2)}$.

2) Les points V_{n+2}, V'_{n+2} coïncident. Alors le point $J_{-(n+2)}$ coïncide avec V_{n+2}.

Dans tous les cas, la suite $\mathcal{J}$ se termine en présentant le cas de Goursat soit au point $J_{-(n+3)}$, soit au point $J_{-(n+2)}$.

3. Nous allons maintenant considérer une congruence W dont la première nappe focale (x) est une surface B et la seconde nappe focale $(\bar{x})$ une surface A.

Rappelons que la suite de Laplace $\bar{L}$ associée à la surface $(\bar{x})$ se termine au point $\bar{U}_1$ en présentant le cas de Laplace et au point $\bar{V}_3$ en présentant le cas de Goursat. Les points de cette suite sont $\bar{U}_1$, $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$. A cette suite nous associons dans S_6 la suite $\bar{U}'_1$, $\bar{U}'$, $\bar{V}'$, $\bar{V}'_1$, $\bar{V}'_2$, $\bar{V}'_3$.

Il est d'abord évident que les points $\bar{U}_1$, $\bar{U}'_1$ ne peuvent coïncider, car alors la suite $\mathcal{J}$ se terminerait au point J_1 alors que le point J_2 appartenant à la droite U_1U_2 existe certainement. Ce point J_2 appartient à la droite $\overline{U}_1\overline{U}_1^{01}$ et ne dépend que de v. Il doit donc coïncider avec le point U_2.

Les points $\overline{V}_3$ et $\overline{V}'_3$ ne peuvent non plus coïncider, car alors la suite J se terminerait au point $J_{-3} = \overline{V}_3$. Or, il doit exister un point J_{-4} appartenant à la droite V_3V_4. Le point J_{-3}, qui appartient aux droites V_2V_3 et $\overline{V}_2\overline{V}_3$ ne peut être fixe sur cette dernière droite, puisque V_2V_3 dépend de u. Il en résulte que le point J_{-4} coïncide avec le point $\overline{V}_3$ qui appartient donc à la droite V_3V_4.

On voit que les points U_2, U'_2 coïncident, de même que les points V_4, V'_4.

4. Sur la droite $\overline{U}\overline{V}$, on a

$$J = \bar{\lambda}\overline{U} + \bar{\mu}\overline{V}$$

et ensuite (1)

$$J_1 = \bar{\mu}\overline{U}_1 + \bar{\mu}_1\overline{U},\ J_{-1} = \bar{\lambda}\overline{V}_1 - \bar{\lambda}_1\overline{V},\ J_{-2} = \bar{\lambda}_1\overline{V}_2 - \bar{\lambda}_2\overline{V}_1,$$
$$J_{-3} = \bar{\lambda}_2\overline{V}_3 - \bar{\lambda}_3\overline{V}_2,$$

avec

$$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}^{01} + \bar{\mu}(\log.\ \bar{b})^{01},\quad \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}^{10} - \bar{\lambda}(\log.\ \bar{a})^{10},$$
$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1^{10} - \bar{\lambda}_1(\log.\ \bar{a}\bar{k}_1)^{10},\ \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_2^{10} - \bar{\lambda}_2(\log.\ \bar{a}\bar{k}_1\bar{k}_2)^{10}.$$

Pour que les points $\overline{U}_1$ et $\overline{U}'_1$ coïncident, on doit avoir $\bar{\mu}_1 = 0$ et pour que les points $\overline{V}_3$ et $\overline{V}'_3$ coïncident, on doit avoir $\bar{\lambda}_3 = 0$, c'est-à-dire des conditions supplémentaires imposées à la congruence (j). On en conclut que *si une congruence* W *a pour nappe focale une surface* A, *la seconde nappe focale est en général une surface* B.

5. Supposons maintenant que nous nous donnions la surface (x), c'est-à-dire une surface B. Est-il possible de choisir la congruence (j) de telle sorte que la surface $(\bar{x})$ soit une surface A ?

Si nous parvenons à déterminer le point $\overline{U}_1$, la question sera résolue, car l'hyperplan polaire de $\overline{U}_1$ est $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3$ qui coupe UV au point J, qui est ainsi déterminé.

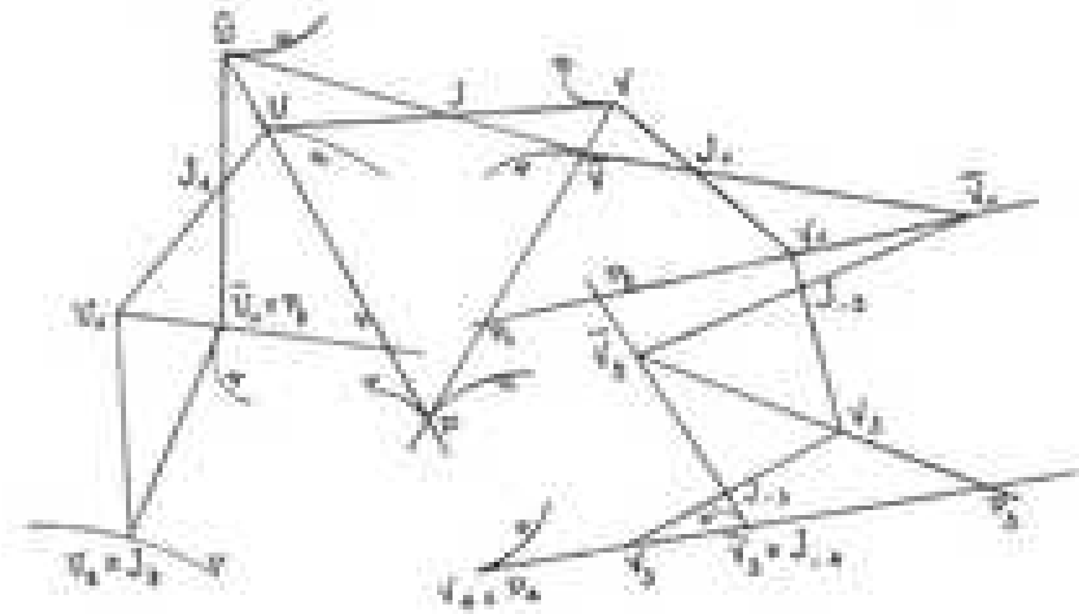
(1) Voir notre exposé cité plus haut (n° 5), p. 22.

Le point $\overline{U}_1$ ne dépend que de v et la tangente en $\overline{U}_1$ à la courbe $(\overline{U}_1)$ doit passer par U_2, qui ne dépend également que de v. On doit donc avoir

$$\overline{U}_1^{01} + M\overline{U}_1 = NU_2,$$

où M et N sont des fonctions de v choisies arbitrairement. On obtient donc la courbe $(\overline{U}_1)$ par des quadratures.

Une surface B *étant donnée, il est possible de choisir une congruence* W *dont elle soit surface focale, la seconde nappe focale étant une surface* A.



Les conditions analytiques posées aux fonctions λ, μ fixant la position du point J sur la droite UV sont les suivantes :

Posons

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu(\log b)^{01},\ \mu_2 = \mu_1^{01} - \mu_1(\log. bh_1)^{01},$$

$$\lambda_1 = \lambda^{10} - \lambda(\log a)^{10},\ \lambda_2 = \lambda_1^{10} - \lambda_1(\log ak_1)^{10},\ \ldots,$$

$$\lambda_4 = \lambda_3^{10} - \lambda_3(\log\ ak_1k_2k_3)^{10}.$$

Les points U_2 et U_2' devant coïncider, on doit avoir

$$\mu_1^{01} - \mu_1\,(\log bh_1)^{01} = 0 \tag{1}$$

et les points V_4 et V'_4 devant également coïncider, on doit avoir

$$\lambda_3^{10} - \lambda_3\,(\log ak_1k_2k_3)^{10} = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) montre que μ doit satisfaire à une équation différentielle du second ordre, la variable étant v. De l'équation (2) on déduit que λ doit satisfaire à une équation différentielle du quatrième ordre, la variable étant u (¹).

6. Nous terminerons en construisant la suite de Laplace $\mathcal{P}$ polaire de la suite $\mathcal{J}$ par rapport à l'hyperquadrique Q (²).

Le point P, intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$ est le pôle de l'hyperplan $U_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$ qui représente le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j.

Le point P_1, intersection des droites $V\overline{V}$ et $V_1\overline{V}_1$ est le pôle de l'hyperplan $U_2^{01}U_2J_1JJ_{-1}$. Le point P_2, intersection des droites $V_1\overline{V}_1$ et $V_2\overline{V}_2$ est le pôle de l'hyperplan $U_2^{02}U_2^{01}U_2J_1J$. Enfin le point P_3 intersection des droites $V_2\overline{V}_2$ et $V_3\overline{V}_3$, pôle de l'hyperplan $U_2^{03}U_2^{02}U_2^{01}U_2J_1$ appartient à la droite V_3V_4. Lorsque u varie, le point P_3 décrit cette droite et le point P_4, pôle de l'hyperplan $U_2^{04}U_2^{03}U_2^{02}U_2^{01}U_2$ coïncide avec V_4.

Le point P_{-1} intersection des droites $U\overline{U}$ et $U_1\overline{U}_1$, est le pôle de l'hyperplan $J_1JJ_{-1}J_{-2}J_{-3}$.

Dans la suite de Laplace $\mathcal{P}$ à laquelle appartiennent les points P_{-1}, P, P_1, P_2, P_3, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Le point P_{-2} est le transformé de P_{-1} dans le sens des v et doit se trouver sur la droite $U_1\overline{U}_1$. Observons que lorsque u varie, le point $\overline{U}_1$ reste fixe, donc la suite de Laplace $\mathcal{P}$ s'arrête au point $\overline{U}_1$ en présentant le cas de Laplace et P_{-2} coïncide avec le point $\overline{U}_1$.

La suite $\overline{U}_1P_{-1}PP_1P_2P_3P_4$ polaire de la suite J par rapport à l'hyperquadrique Q s'arrête au point $\overline{U}_1$ en présentant le cas de Laplace et au point P_4 en présentant le cas de Goursat.

Liège, le 22 mars 1963.

(¹) Dans une note *Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1958, pp. 312-320), nous avions attaqué la question qui fait l'objet de cette nouvelle note par voie analytique. Notre conclusion était inexacte.

(²) Voir nos notes *Sur la Théorie des congruences W* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1954, pp. 1028-1037), *Sulle congruenze W* (RENDICONTI DI MATEMATICA E DELLE SUE APPLICAZIONI, 1956, pp. 3-43).