Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur les congruences W

Lucien Godeaux

Résumé
En partant du fait que le point qui représente sur l'hyperquadrique de Klein une droite engendrant une congruence W décrit un réseau conjugué aux congruences engendrées par les droites représentant les faisceaux de tangentes aux nappes focales, on établit par une voie géométrique différentes propriétés des congruences W.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Remarques sur les congruences W,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — En partant du fait que le point qui représente sur l'hyperquadrique de Klein une droite engendrant une congruence W décrit un réseau conjugué aux congruences engendrées par les droites représentant les faisceaux de tangentes aux nappes focales, on établit par une voie géométrique différentes propriétés des congruences W.

On sait qu'à un point d'une surface, on peut attacher une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie. A chacune des nappes focales d'une congruence W est donc attachée une suite de quadriques. D'autre part, à la congruence W est également attachée une suite de quadriques. L'objet de cette note est d'établir, par une voie géométrique, les relations entre ces trois suites de quadriques. Nous retrouvons ainsi un certain nombre de propriétés établies analytiquement dans des notes antérieures (1) et nous en ajoutons quelques nouvelles.

(1) *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface* (Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 1928, pp. 213-226), *Sur les groupes de trois congruences W ayant une nappe focale commune* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1930, pp. 983-988), *Note sur les congruences W* (IDEM., 1932, pp. 662-671), *Sur une suite de quadriques associées à une congruence W* (AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS, 1947, pp. 490-493), *Alcuni osservazioni sulle congruenze W* (RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO DELLA UNIVERSITA DI TORINO, 1953-54, pp. 39-46), *Una famigla di quadriche associata ad una congruneze W* (BOLLETTINO DELL, UNIONE MATEMATICA ITALIANA,

1. Soit (j) une congruence W engendrée par une droite j. Désignons par (x) et $(\bar{x})$ les nappes focales de la congruence (j) et par u, v les asymptotiques de ces surfaces.

En désignant par U, V les points de la quadrique Q de Klein représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de la surface (x) et par $\bar{U}$, $\bar{V}$ les droites analogues en un point $\bar{x}$ de $(\bar{x})$, on a, dans S_5 deux suites de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \qquad (L)$$

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots, \qquad (\bar{L})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ se rencontrent en un point J image de la droite j et ce point décrit un réseau conjugué aux congruences (UV), $(\bar{U}\bar{V})$ (Darboux). Le point J appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{J})$$

inscrite dans les suites (L), $(\bar{L})$. D'une manière précise, le point J_n appartient aux droites $U_{n-1}U_n$ et $\bar{U}_{n-1}\bar{U}_n$, le point J_{-n} aux droites $V_{n-1}V_n$, $\bar{V}_{n-1}\bar{V}_n$. Dans la suite $\mathcal{J}$, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

2. Le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j est représenté par l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$. Nous allons construire le pôle de cet hyperplan.

Les hyperplans polaires des points U, $\bar{U}$ sont $U_1UVV_1V_2$,

---

1956, pp. 137-140), *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1954, pp. 880-885), *Sur une congruence W particulière* (IDEM., 1954, pp. 983-989), *Sur la théorie des congruences W* (IDEM., 1954, pp. 1026-1037, 1955, pp. 343-345, 1956, pp. 240-214), *Sulle congruenze W* (RENDICONTI DI MATEMATICA E DELLE SUE APPLICAZIONI, 1956, pp. 36-45), *Congruneze W e trasformazioni di Guichard* (RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO DI MESSINA, 1957, pp. 1-12), *Familles de quadriques attachées à des congruences W* (REVUE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES DE BUCAREST, 1956, pp. 93-97), *Une propriété caractéristique des congruences W* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1960, pp. 41-16), *Sur les suites de Laplace et les congruences W* (ARCHIV DER MATHEMATIK, 1960, pp. 72-76). Voir aussi notre exposé sur *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé*. Actualités scientifiques, N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

$\overline{U}_1\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$. Ils ont en commun l'espace à trois dimensions $J_1JJ_{-1}J_{-2}$. De même, les hyperplans polaires des points V, $\overline{V}$ ont en commun l'espace à trois dimensions $J_2J_1JJ_{-1}$. L'hyperplan polaire du point commun aux droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$ contient ces deux espaces et coïncide donc avec l'hyperplan représentant le complexe linéaire osculateur en j à (j). Le pôle P de cet hyperplan est donc le point commun aux droites $U\overline{U}$, $V\overline{V}$. Il décrit un réseau (u, v).

Les hyperplans polaires des points U_1, $\overline{U}_1$ sont $UVV_1V_2V_3$, $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3$; ils ont en commun l'espace à trois dimensions $JJ_{-1}J_{-2}J_{-3}$. Il en résulte que le pôle de l'hyperplan $J_1JJ_{-1}J_{-2}J_{-3}$ est le point P_1 commun aux droites $U\overline{U}$ et $U_1\overline{U}_1$. On passe de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$ à l'hyperplan $J_1JJ_{-1}J_{-2}J_{-3}$ en effectuant une transformation de Laplace dans le sens des u, donc P_1 est le transformé de Laplace de P dans le sens des v.

De même, le transformé de Laplace P_{-1} de P dans le sens des u est l'intersection des droites $V\overline{V}$, $V_1\overline{V}_1$; c'est le pôle de l'hyperplan $J_3J_2J_1JJ_{-1}$.

Désignons par P_n le point d'intersection des droites $U_{n-1}\overline{U}_{n-1}$, $U_n\overline{U}_n$ et par P_{-n} le point d'intersection des droites $V_{n-1}\overline{V}_{n-1}$, $V_n\overline{V}_n$. Le point P_n est le pôle de l'hyperplan $J_{-n+2}J_{-n+1}J_{-n}J_{-n-1}J_{-n-2}$ et P_{-n} celui de l'hyperplan $J_{n+2}J_{n-1}J_nJ_{n+1}J_{n+2}$. Ces points appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les suites $(\mathcal{J})$ et $(\mathcal{P})$ sont polaires l'une de l'autre par rapport à Q.

3. Désignons par W_1, W_2 les points d'intersection de Q avec la droite U_1V_1 et par $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ les points d'intersection de Q avec la droite $\overline{U}_1\overline{V}_1$. Ces points sont les images des directrices de Wilczynski respectivement des surfaces (x), $(\bar{x})$.

Soient en outre G_1, G_2 les points d'intersection de Q avec la droite J_1J_{-1}.

L'espace à trois dimensions U_1UVV_1 coupe Q suivant deux plans UVW_1, UVW_2 représentant l'un la gerbe de sommet x et l'autre le plan réglé ξ tangent à la surface (x) en x. De même, l'espace $\bar{U}_1\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1$ coupe Q suivant deux plans $\bar{U}\bar{V}\bar{W}_1$; $\bar{U}\bar{V}\bar{W}_2$.

Supposons, pour fixer les idées, que le plan UVW_1 représente la gerbe de sommet x et que le point G_1 appartienne à ce plan. La droite g_1, homologue de G_1, passe par x. Le point C_1 appartient à l'un des plans $\bar{U}\bar{V}\bar{W}_1$; $\bar{U}\bar{V}\bar{W}_2$. Ce ne peut être au plan représentant la gerbe de sommet $\bar{x}$, car la droite g_1 coïnciderait avec j, ce qui est absurde. Le point G_1 appartient donc au plan représentant le plan réglé $\bar{\xi}$, tangent à $(\bar{x})$ en $\bar{x}$.

Le point G_2 appartient au plan UVW_2 représentant le plan réglé ξ et à celui des plans $\bar{U}\bar{V}\bar{W}_1$, $\bar{U}\bar{V}\bar{W}_2$ représentant la gerbe de sommet $\bar{x}$.

Les deux droites g_1, g_2 passent donc l'une par le point x et l'autre par le point $\bar{x}$. La première appartient au plan tangent $\bar{\xi}$ à $(\bar{x})$ en $\bar{x}$ et la seconde au plan tangent ξ à (x) en x.

4. Considérons les plans $J_nJ_{n+1}J_{n+2}$ et $P_{-n}P_{-n-1}P_{n-2}$. Ils sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Ψ_n.

On peut supposer n positif ou négatif. Nous désignerons en particulier par Ψ_0 la quadrique correspondant aux plans JJ_1J_2 et $PP_{-1}P_{-2}$, par Ψ_{-0} celle qui correspond aux plans $JJ_{-1}J_{-2}$ et PP_1P_2, enfin par Ψ celle qui correspond aux plans J_1JJ_{-1}, P_1PP_{-1}. On obtient ainsi une suite de quadriques

$$\ldots,\ \Psi_n,\ \ldots,\ \Psi_0,\ \Psi,\ \Psi_{-0},\ \ldots,\ \Psi_{-n},\ \ldots$$

Les suites $\mathcal{J}$ et $\mathcal{P}$ étant polaires l'une de l'autre par rapport à Q, deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points (en général distincts) qui sont caractéristiques pour les deux quadriques [1].

La quadrique Ψ est dégénérée. Le plan P_1PP_{-1} coïncide en effet avec le plan $UV\bar{U}\bar{V}$ et coupe Q suivant les droites UV, $\bar{U}\bar{V}$. La quadrique Ψ est donc formée des plans focaux ξ, $\bar{\xi}$ de la

[1] Voir notre note *Sur l'enveloppe de certaines suites de quadriques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1962, pp. 1250-1252).

droite j et le plan P_1PP_{-1} représente les deux faisceaux de rayons (x, ξ), $(\bar{x}, \bar{\xi})$. Le plan J_1JJ_{-1} coupe Q quivant les droites JG_1, JG_2 et représente donc les faisceaux de rayons $(x, \bar{\xi})$, $(\bar{x}, \xi)$.

Considérons maintenant la quadrique Ψ_0. Le plan JJ_1J_2 touche Q au point J et le plan $PP_{-1}P_{-2}$ contient les points V, $\overline{V}$. Il en résulte que les quatre points de contact des quadriques Ψ, Ψ_0 se réduisent à deux, les points x, $\bar{x}$ comptés chacun deux fois. La quadrique Ψ_0 touche les surfaces (x), $(\bar{x})$ aux points x, $\bar{x}$.

De même, la quadrique Ψ_{-0} touche les surfaces (x), $(\bar{x})$ aux points x, $\bar{x}$ et touche la quadrique Ψ_0 en ces points, mais elles ne se raccordent pas suivant la droite j.

Les quadriques Ψ_0, Ψ_1 se touchent en quatre points sommets d'un quadrilatère gauche dont les arêtes sont représentées par les intersections avec Q des droites J_1J_2 et $P_{-1}P_{-2}$. De même, les quadriques Ψ_{-0}, Ψ_{-1} se touchent en quatre points.

5. Soient Ψ_{n-1}, Ψ_n deux quadriques consécutives ($n \geqslant 1$ ou $n \leqslant 0$). Désignons par C′, C″ les points de rencontre de J_nJ_{n+1} avec Q, par D′, D″ ceux de la droite $P_{-n}P_{-n-1}$.

Soit r la droite intersection des espaces à trois dimensions $J_{n-1}J_nJ_{n+1}J_{n+2}$ et $P_{-n+1}P_{-n}P_{-n-1}P_{-n-2}$. Ces espaces sont respectivement conjugués par rapport à Q des droites $P_{-n}P_{-n-1}$, J_nJ_{n+1}, donc la droite r est la conjuguée de l'espace à trois dimensions $\rho = J_nJ_{n+1}P_{-n}P_{-n-1}$.

L'homographie harmonique H ayant pour axes la droite r et l'espace ρ transforme Q en elle-même, donc les plans tangents en C′, C″, D′, D″ respectivement aux surfaces (C′), (C″), (D′), (D″) passent par r.

Les tangentes aux courbes u en C′, C″ tracées sur les surfaces (C′), (C″) sont situées dans le plan $J_{n-1}J_nJ_{n+1}$ qui ne peut passer par r et coupe donc cette droite en un point A. Ces tangentes rencontrent donc r en un même point A. De même, les tangentes aux courbes v en C′, C″ appartiennent au plan $J_nJ_{n+1}J_{n+2}$ qui ne peut passer par r et se coupent donc en un point B de cette droite.

Pour la même raison, les tangentes aux courbes u en D′, D″ se coupent en un point A′ de r et les tangentes aux courbes v en ces points se coupent en un point B′ de r.

Soient c', c'', d′, d'' les droites représentées par les points C′, C″, D', D''. Ces droites forment un quadrilatère gauche dont les sommets sont caractéristiques pour les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n.

Supposons que les asymptotiques des surfaces $(c'd')$, $(c'd'')$, $(c''d')$, $(c''d'')$ soient les courbes u, v. Alors les droites c', c'', d', d'' décrivent des congruences W et les points C', C'', D', D'' des réseaux (u, v). Le réseau (C') par exemple est conjugué aux congruences (J_nJ_{n-1}), (C'D'), (C'D'').

Si R_1, R_2 sont les points de rencontre de r avec Q, ces points représentent les diagonales du quadrilatère gauche forma par les droites c', c'', d', d''. Les droites R_1C', R_1C'', ..., R_2D'' appartiennent à l'hyperquadrique Q.

Désignons par t'_u, t''_u les tangentes aux courbes u en C', C'' et par t'_v, t''_v les tangentes aux courbes v aux mêmes points. Lorsque v varie, t'_u et t''_u décrivent des développables dont les plans tangents sont $t'_ut''_v$ et $t'_ut''_v$, qui passent par r, donc la tangentes à la courbe v en A est la droite r. On démontre de même que lorsque u varie, la tangente à la courbe u en B est la droite r. Il en résulte que les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

En reprenant le même raisonnement en partant des points D', D'', on voit que la tangente à la courbe v en A' est la droite r et que la tangente à la courbe u en B' est également la droite r. Les points A' et B' sont donc également transformés de Laplace l'un de l'autre. Il en résulte que les points A et A' d'une part et les points B, B' d'autre part, doivent coïncider.

Nous avons déjà fait antérieurement ce raisonnement lorsque les suites de Laplace $\mathcal{J}$ et $\mathcal{P}$ coïncident (¹).

Inversement, supposons que A' coïncide avec A et B' avec B, ce dernier point étant le transformé de Laplace de A dans le sens des v et A celui de B dans le sens des u. Les droites t'_u ou t'_v décrivent des développables lorsque v ou u varie et le point C' décrit un réseau (u, v). Il en est de même des points C'', D', D'' et les droites c', c'', d', d'' décrivent des congruences W.

Les points A, B appartiennent à une suite de Laplace inscrite dans le polyèdre de Laplace lieu des plans déterminés par trois

---

(¹) *Sur l'enveloppe des quadriques attachées en un point d'une surface* (Deuxième Colloque de Géométrie différentielle, tenu à Liège en 1961 ; Louvain, Librairie Universitaire et Paris, Gauthier-Villars, 1962, pp. 151-159).

points consécutifs de la suite $\mathcal{J}$ et au polyèdre analogue attaché à la suite $\mathcal{P}$.

De plus, les points C′, C″ appartiennent à deux suites de Laplace inscrites dans la suite $\mathcal{J}$ et les points D′, D″ à deux suites de Laplace inscrites dans la suite $\mathcal{P}$.

6. A chaque point d'une surface (x) nous avons attaché une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie, deux quadriques consécutives de la suite se touchant en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques [1].

Soit

$$\Phi,\ \Phi_n,\ \ldots,\ \Phi_u,\ \ldots$$

la suite de quadriques attachée à la surface (x). Rappelons que les systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique Φ_n sont représentés par les coniques sections de Q par les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}$, $V_nV_{n+1}V_{n+2}$, conjugués par rapport à Q.

Soit

$$\bar\Phi,\ \bar\Phi_1,\ \ldots,\ \bar\Phi_n,\ \ldots$$

la suite de quadriques attachée à la surface $(\bar x)$.

Soient H′ l'homographie harmonique ayant comme axes les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ et $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, et $\bar H'$ celle qui a comme axes les plans $\bar U_{n-1}\bar U_n\bar U_{n+1}$, $\bar V_{n-1}\bar V_n\bar V_{n+1}$. Elles transforment Q en elle-même.

Les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, $\bar U_{n-1}\bar U_n\bar U_{n+1}$ ont en commun la droite J_nJ_{n+1} qui coupe Q en deux points C′, C″ et les plans $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, $\bar V_{n-1}\bar V_n\bar V_{n+1}$ ont en commun la droite $J_{-1}J_{-n-1}$ qui coupe Q en deux points $\bar C'$, $\bar C''$. Les quadriques Φ_{n-1}, $\bar\Phi_{n-1}$ ont en commun un quadrilatère gauche dont les côtés c', c'', $\bar c'$, $\bar c''$ sont représentés par les points C′, C″, $\bar C'$, $\bar C''$.

L'homographie H′ représente la polarité par rapport à la quadrique Φ_{n-1} et $\bar H'$ la polarité par rapport à la quadrique $\bar\Phi_{n-1}$. Le produit $K = H'\,\bar H' = H'\bar H'$ représente le produit de ces polarités, c'est-à-dire l'homographie harmonique ayant pour axes les diagonales du quadrilatère gauche.

---

[1] *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1927, pp. 812-826 ; 1928, pp. 31-41).

Sur la droite $C'\bar{C}'$, les homographies H' et $\bar{H}'$ déterminent la même involution, par conséquent les points de cette droite sont tous unis pour K. Il en est de même des points des droites $C'\bar{C}''$, $C''\bar{C}'$, $C''\bar{C}''$ et l'espace à trois dimensions $J_nJ_{n+1}J_{-n}J_{-n-1}$ est un axe de l'homographie K. Le second axe de K est la droite polaire de l'espace précédent par rapport à Q. Cette droite passe par les points représentant les diagonales du quadrilatère gauche $c'c''\bar{c}'\bar{c}''$.

Nous avons appelé D', D'' les points d'intersection de Q avec la droite $P_{-n}P_{-u-1}$. Appelons $\bar{D}'$, $\bar{D}''$ les points d'intersection de Q avec la droite P_nP_{n+1}. A ces quatre points correspondent les droites d', d'', $\bar{d}'$, $\bar{d}''$.

Les quadriques $\Phi_{n-1}\,\bar{\Phi}_{n-1}$ contiennent les droites c', c'', $\bar{c}'$, $\bar{c}''$.

Les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n contiennent les droites c', c'', d', d''.

Les quadriques Ψ_{-n-1}, Ψ_{-n} contiennent les droites $\bar{c}'$, $\bar{c}''$, $\bar{d}'$, $\bar{d}''$.

7. A la quadrique Ψ_n sont associés les plans $J_nJ_{n+1}J_{n+2}$ et $P_{-n}P_{-n-1}P_{-n-2}$. Observons que ce dernier plan contient les points V_n, $\bar{V}_n$, V_{n-1}, $\bar{V}_{n+1}$, dans les droites V_nV_{n+1}, $\bar{V}_n\bar{V}_{n+1}$. Désignons par M', M'' les points de rencontre de Q avec la droite V_nV_{n+1}, par $\bar{M}'$, $\bar{M}''$ ceux de la droite $\bar{V}_n\bar{V}_{n+1}$, par m', m'', $\bar{m}'$, $\bar{m}''$ les droites qui leur correspondent. Ces quatre droites appartiennent à Ψ_n, les deux premières aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n, les deux dernières aux quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$, $\bar{\Phi}_n$.

L'intersection des quadriques Φ_{n-1} et Ψ_n se compose des quadre droites c', c'', m', m''. Celles des quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$ et Ψ_n des quatre droites c', c'', $\bar{m}'$, $\bar{m}''$. Les droites qui correspondent aux points d'intersection de la droite $J_{n+1}J_{n+2}$ avec Q appartiennent à l'intersection des quadriques Φ_n et $\bar{\Phi}_n$ avec Ψ_n.

De même, si l'on désigne par n', n'' les droites qui correspondent aux points d'intersection de Q avec la droite U_nU_{n+1} et par $\bar{n}'$, $\bar{n}''$ celles qui correspondent aux points d'intersection de la droite $\bar{U}_n\bar{U}_{n+1}$ avec Q, on voit que l'intersection des quadriques Φ_{n-1}, Ψ_{-n} se compose des droites d', d'', n', n'' et que l'intersection des quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$ et Ψ_{-n} se compose des droites d', d'', $\bar{n}'$, $\bar{n}''$.

Liège, le 11 février 1963.