Congruences W dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques gauches d'un mode appartiennent à des complexes linéaires, (Seconde note).

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de congruences W liées intrinsèquement à une surface dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques gauches d'un mode appartiennent à des complexes linéaires.

Congruences W dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques gauches d'un mode appartiennent à des complexes linéaires,

(Seconde note).

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de congruences W liées intrinsèquement à une surface dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques gauches d'un mode appartiennent à des complexes linéaires.

Faisant suite à notre première note (1), nous revenons ici sur des congruences W que nous avons introduites dans un mémoire antérieur (2). Une surface (x) étant donnée, dont les asymptotiques u ou les réglées asymptotiques gauches u appartiennent à des complexes linéaires, nous avions montré qu'à cette surface étaient liées d'une manière intrinsèque deux congruences W dont elle était surface focale. Nous déterminons ici la seconde nappe focale de chacune de ces congruences, dans l'hypothèse où la surface (x) est générale. Dans chaque cas, la seconde nappe focale est de même nature que la surface (x).

1. Rappelons tout d'abord les résultats que nous avons établis dans le mémoire cité.

Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v et à laquelle est associée dans l'espace S_5 une suite de Laplace L terminée dans le sens des v au point U_n en présentant le cas de Laplace et dans le sens des u au point V_{n+2} en présentant le

(1) Bulletin de l'Académie, 1963, pp. 430-440.
(2) *Quelques propriétés d'une surface associée à une suite de Laplace terminée* (Annali di Matematica, s. IV, t. LIII, 1961, pp. 9-20).

cas de Goursat. Supposons que la droite $V_{n+1} V_{n+2}$ rencontre l'hyperquadrique Q en deux points distincts et soit G un de ces points.

Nous avons montré que le point G ne dépend que de v et que si l'on désigne par $J_{-(n+1)}$ le point de rencontre de la droite V_nV_{n+1} avec la tangente en G à la courbe (G), ce point dépend de u, v et décrit un réseau conjugué à la congruence (V_nV_{n+1}). Le point $J_{-(n+1)}$ détermine une suite de Laplace J_{-n}, $J_{-(n-1)}$, ..., J_{-1}, J, J_1, ... inscrite dans la suite V_n, V_{n-1}, V_{n-2}, ..., V_1, V, U, U_1, ..., c'est-à-dire dans la suite L. Le point J représente une droite j engendrant une congruence W dont (x) est une nappe focale. A la surface (x) sont ainsi associées d'une manière intrinsèque deux congruences W correspondant aux deux points d'intersection de la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ avec l'hyperquadrique Q.

2. Supposons $n = 1$. Les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires et la suite L comprend six termes

$$U_1, U, V, V_1, V_2, V_3. \tag{L}$$

Le point G représente une droite g engendrant une réglée (g) lorsque v varie. Les tangentes flecnodales de la réglée (g) relatives à la droite g sont les directrices d'une congruence bilinéaire déterminée par la droite g et les trois droites de (g) infiniment voisines successives. Cette congruence a pour image l'espace à trois dimensions $GJ_{-2}J_{-1}J$ osculateur en G à la courbe (G). Cet espace a pour conjuguée par rapport à Q une droite r coupant cette hyperquadrique en deux points H_1, H_2 images des tangentes flecnodales h_1, h_2 de (g). On en conclut que pour une valeur de v, la droite j s'appuie sur les droites h_1, h_2 quel que soit u.

Observons que le complexe linéaire contenant une courbe u de la surface (x) et les complexes linéaires contenant les trois courbes u infiniment voisines de la première ont en commun les droites g, g' représentées par les points d'intersection G, G' de la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ avec Q.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si (x) *est une surface dont les asymptotiques* u *appartiennent à des complexes linéaires, quatre de ces complexes infiniment voisins* *successifs ont en commun deux droites* g, g' *indépendantes de* u *dont les lieux, lorsque* v *varie, sont des réglées* (g), (g'). *Les droites issues d'une courbe* u *de la surface* (x) *et s'appuyant sur les tangentes flecnodales de la réglée* (g), *ou* (g') *,relatives aux génératrices* g *ou* g' *homologues de la courbe* u, *engendrent des congruences* W *dont* (x) *est une surface focale.*

Pour déterminer la seconde nappe focale ($\bar{x}$) de la congruence (j), observons que la suite de Laplace L associés à cette surface dans S_5, doit être circonscrite à la suite $J_1JJ_{-1}J_{-2}G$. Dans le cas général où nous nous plaçons ici, le point J_2 existe et se trouve sur la droite $U_1U_1^{01}$. La suite $\overline{L}$ doit donc contenir un point $\overline{U}_1$ en lequel elle s'arrête en présentant le cas de Laplace ; le point J_2 se trouve sur la droite $\overline{U}_1\overline{U}_1^{01}$.

L'espace polaire de $\overline{U}_1$, c'est-à-dire l'espace $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3$, doit contenir l'espace $JJ_{-1}J_{-2}G$, donc le point $\overline{U}_1$ se trouve sur la droite $r = H_1H_2$.

Les asymptotiques u *de la secondz nappe focale de la congruence* (j) *appartiennent à des complexes linéaires. Les complexes linéaires relatifs à deux courbes* u *homologues des nappes focales de* (j) *ont en commun la congruence linéaire dont les directrices sont les tangentes flecnodales de la surface* (g) *relatives à la droite* g *homologue.*

3. Supposons $n = 2$. Les réglées asymptotiques gauches u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. La suite L relative à la surface (x) contient huit termes

$$U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3, V_4 \tag{L}$$

Soit g la droite représentée par le point G. L'hyperplan $GJ_{-3}J_{-2}J_{-1}J$ osculateur à la courbe (G) en G a pour pôle par rapport à Q le point P_{-2} et ne dépend que de v. Il représente un complexe linéaire déterminé par la droite g et par quatre droites g infiniment voisines successives de (g). Ce complexe Σ contient les droites j passant par les points d'une courbe u de la surface (x). Observons que l'hyperplan polaire de P_{-2} par rapport à Q coupe la droite UV au seul point J, par conséquent la droite j est la tangente à la surface (x) en un point d'une courbe u appartenant au complexe Σ. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si (x) *est une surface dont les réglées gauches asymptotiques* u *appartiennent à des complexes linéaires, quatre de ces complexes infiniment voisins successifs ont en commun deux droites* g, g′ *ne dépendant que de* v. *Les tangentes à la surface* (x) *le long d'une courbe* u *appartenant au complexe linéaire osculateur à la réglée* (g) *ou* (g′) *le long de la droite* g *ou* g′ *correspondante, engendrent des congruences* W.

Pour déterminer la seconde nappe focale $(\bar{x})$ de la congruence (j), observons que dans le cas général où nous nous plaçons, le point J_3 existe et est situé sur la droite $U_2U_2^{01}$. Par conséquent, la suite $\bar{L}$ associée dans S_5 à la surface $(\bar{x})$ doit contenir huit points $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, ..., $\bar{V}_3$, $\bar{V}_4$, comme la suite L. On en conclut :

La seconde nappe focale $(\bar{x})$ *de la congruence* (j) *a ses réglées gauches asymptotiques de mode* u *contenues dans des complexes linéaires.*

Les points U_1, $\bar{U}_1$ et P_{-1} sont en ligne droite et cette droite coupe l'hyperquadrique Q en deux points H_1, H_2 représentant les tangentes flecnodales de la réglée (g) relative à la droite g homologue. On en conclut que le complexe Σ appartient au faisceau déterminé par les complexes contenant les réglées gauches asymptotiques relatives à deux courbes u homologues des surfaces (x) et $(\bar{x})$, pour chaque valeur de v.

Liége, le 30 mai 1963.