Bulletin de la Classe des sciences

Congruences W dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques gauches d'un mode des nappes focales appartiennent à des complexes linéaires (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des configurations associées aux congruences W en question dans un espace linéaire à cinq dimensions. Congruences W dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques homologues des nappes focales appartiennent aux mêmes complexes linéaires.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Congruences W dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques gauches d'un mode des nappes focales appartiennent à des complexes linéaires

(Première Note),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude des configurations associées aux congruences W en question dans un espace linéaire à cinq dimensions. Congruences W dont les asymptotiques ou les réglées asymptotiques homologues des nappes focales appartiennent aux mêmes complexes linéaires.

Une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v étant donnée, on lui associe dans un espace linéaire à cinq dimensions une suite de Laplace L déterminée par les points U, V qui représentent sur l'hyperquadrique Q de Klein les tangentes aux asymptotiques u, v. Nous considérons dans cette note les congruences W ayant pour nappes focales des surfaces dont la suite L associée se termine, en présentant le cas de Laplace, au n^e transformé de U dans le sens des v. Appelons-les, pour abréger, congruences W_n. A une congruence W_n sont associées dans S_5 quatre suites de Laplace : les suites L, $\overline{L}$ associées aux nappes focales (x), $(\bar{x})$, la suite $\mathcal{J}$ déterminée par les points qui représentent les droites de la congruence et la suite $\mathcal{P}$ polaire de la précédente par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous déterminons la configuration formée par ces quatre suites.

Les congruences W_1 ont pour nappes focales des surfaces dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires ; elle ont été étudiées par M. Terracini [1]. Celui-ci a en particulier montré l'existence de congruences W_1 dont les asymptotiques correspondantes des nappes focales appartiennent au même complexe linéaire. Nous donnons une autre démonstration de ce théorème.

Nous appelons réglée asymptotique gauche d'une surface le lieu des tangentes aux asymptotiques d'un mode aux points d'une asymptotique de l'autre mode. Les congruences W_2 ont pour nappes focales des surfaces dont les réglées asymptotiques gauches d'un mode appartiennent à des complexes linéaires. Nous montrons l'existence de congruences W_2 dont les réglées asymptotiques gauches homologues appartiennent au même complexe linéaire.

Dans un mémoire récent [2], nous avons attaché à une surface (x) dont le n^e transformé de U dans le sens des v décrit une courbe, deux congruences W dont (x) est une surface focale. Dans une seconde note, nous déterminerons la nature des secondes nappes focales de ces congruences.

Nous utilisons les notations et les résultats de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* [3] et d'une autre note.

1. Soit (j) une congruence W dont nous désignerons les nappes focales par (x) et $(\bar{x})$, ces surfaces étant rapportées à leurs asymptotiques u, v.

Si U et V sont les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes aux courbes u, v de (x) en un point

[1] *Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari* (Atti della R. Accademia di Torino, 1923-1924, t. LIX, pp. 441-461). Voir aussi *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*. Appendice IV alla *Geometria Proiettiva Differenziale* de G. Fubini et E. Cech, t. II (Bologna, Zanichelli, 1927), pp. 771-782.

[2] *Quelques propriétés d'une surface associée à une suite de Laplace terminée* (Annali di Matematica, s. 4, vol. LIII, 1961, pp. 9-20). Voir aussi *Sulle superficie associate ad une successione di Laplace chiusa* (Bollettino della Unione Matematica Italiana, 1960, pp. 159-161).

[3] Actualités scient. N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Voir aussi notre note *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée*, Colloque de Géométrie Différentielle du C.B.R.M. de Louvain, 1951 (Paris et Liège, 1952).

x, on sait que ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre et déterminent une suite de Laplace L, autopolaire par rapport à Q. Nous supposerons que la suite L s'arrête au n^e transformé de U dans le sens des v en présentant le cas de Laplace. Il en résulte que la suite L s'arrête au $(n+2)^e$ transformé de V dans le sens des u en présentant le cas de Goursat. La suite s'écrira donc

$$U_n,\ U_{n-1},\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_{n+1},\ V_{n+2}, \qquad \text{(L)}$$

Le point U_n ne dépend que de v. Le point V_{n+2} ne dépend non plus que de v mais la droite $V_{n+1}\ V_{n+2}$ est tangente à la courbe (V_{n+2}).

Nous supposerons que la seconde nappe focale $(\bar{x})$ de (j) présente les mêmes caractères et qu'à cette surface est donc attachée la suite de Laplace $\bar{L}$:

$$\bar{U}_n,\ \bar{U}_{n-1},\ \ldots,\bar{U}_1,\ ,\bar{U}\bar{V},\bar{V}_1,\ldots,\bar{V}_{n+1},\ \bar{V}_{n+2}. \qquad \text{(L)}$$

Les droites $UV, \bar{U}\bar{V}$ se coupent au point J qui représente la droite j. Il appartient à une suite de Laplace $\mathcal{J}$ inscrite dans les suites L et $\bar{L}$, ce point décrivant un réseau conjugué aux congruences (UV) et $(\bar{U}\bar{V})$. Le point commun aux droites U_iU_{i+1} et $\bar{U}_i\bar{U}_{i+1}$ sera désigné par J_{i+1} et celui qui appartient aux droites V_iV_{i+1} et $\bar{V}_i\bar{V}_{i+1}$ par $J_{(i+1)}$.

On peut attacher à la congruence (j) deux autres suites de Laplace de la manière suivante :

Supposons que la liaison entre les points U, V s'écrive

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0.$$

Le point J est représenté par

$$J = \lambda U - \mu V$$

et on peut choisir le facteur de proportionnalité des coordonnées de manière à avoir

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0, \quad \lambda^{01} + 2a\mu = 0.$$

Cela étant, considérons un espace linéaire à six dimensions S_6 dont S_5 soit un hyperplan et, dans cet espace S_6, un point U' dont les coordonnées sont celles de U et μ et un point V' dont les coordonnées sont celles de V et λ. Les points U', V' sont transformés de Laplace l'un de l'autre et déterminent dans S_6 une suite de Laplace L'. Cette suite est semblable à la suite L et cette dernière est d'ailleurs une projection de L'. Le point J est l'intersection des droites UV et U'V', le point J_{i+1} celui des droites U_iU_{i+1} et $U'_iU'_{i+1}$, enfin le point $J_{-(i-1)}$ celui des droites V_iV_{i-1} et $V'_iV'_{i-1}$.

En partant de la suite $\overline{L}$, on peut aussi attacher à la congruence (j) et d'une manière analogue, une suite de Laplace $\overline{L}'$ dans un espace S_6.

2. Nous aurons à considérer plusieurs cas suivant que les points U_n, $\overline{U}_n$ sont distincts ou non et que les points V_{n-2}, $\overline{V}_{n-2}$ sont distincts ou non.

Rappelons que le point V_{n-2} est le pôle, par rapport à Q, de l'hyperplan osculateur à la courbe (U_n) en U_n et que, d'autre part, le point U_n est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan osculateur à la courbe (V_{n-2}) au point V_{n+2}. Il en résulte que si U_n et $\overline{U}_n$ coïncident, il en est de même de V_{n-2} et de $\overline{V}_{n-2}$. Inversement, si V_{n-2} et $\overline{V}_{n-2}$ coïncident, il en est de même de U_n et de $\overline{U}_n$. Il y aura donc deux cas à examiner.

3. Nous supposerons en premier lieu que les points U_n, $\overline{U}_n$ sont distincts. Alors le point J_n, intersection des droites $U_{n-1}U_n$, $\overline{U}_{n-1}\overline{U}_n$ est distinct de U_n et de $\overline{U}_n$. Le point U'_n est certainement distinct de U_n sans quoi J_n coïnciderait avec U_n. Les droites $U_nU_n^{01}$, $\overline{U}_n\overline{U}_n^{01}$, $U'_nU_n'^{01}$, $\overline{U}'_n\overline{U}_n'^{01}$ et $J_nJ_n^{01}$ concourent en un point J_{n+1} qui ne dépend que de v et qui termine la suite $\mathcal{J}$ des J en présentant le cas de Laplace.

Lorsque u varie, les droites $V_{n-1}V_{n-2}$, $\overline{V}_{n-1}\overline{V}_{n-2}$ restent fixes et il en est de même du point $J_{-(n-2)}$ intersection de ces droites. Les plans $V_nV_{n-1}V_{n-2}$ et $\overline{V}_n\overline{V}_{n-1}\overline{V}_{n-2}$ sont les plans osculateurs aux courbes (V_{n-1}), $(\overline{V}_{n-2})$ aux points $V_{n-2}\overline{V}_{n-2}$; ils sont distincts et se rencontrent suivant la droite $J_{-(n-1)}J_{-(n-2)}$. Les points V_n, V_{n-1} et $\overline{V}_n$, $\overline{V}_{n-1}$ dépendent de u et il en est de même de $J_{-(n-1)}$. La droite $J_{-(n-1)}$ $J_{-(n-2)}$ est indépendante de u et par conséquent la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J_{-(n-2)}$ en présentant le cas de Goursat. Lorsque u varie, le point $J_{(n+1)}$ varie sur la droite $J_{-(n+1)}J_{(n+2)}$.

Le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j est représenté par l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$ dont le pôle est le point P intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$.

Le pôle de l'hyperplan $J_3J_2J_1JJ_{-1}$ est le point P_1 commun aux droites $V\overline{V}$ et $V_1\overline{V}_1$; c'est le transformé de Laplace du point P dans le sens des u. Le pôle de l'hyperplan $J_1JJ_{-1}J_{-2}J_{-3}$ est le point P_{-1} intersection des droites UU, U_1, U_1 ; c'est le transformé de Laplace de P dans le sens des v.

Le point P_{n+2}, intersection des droites $V_{n+1}\overline{V}_{n+1}, V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$ est le pôle de l'hyperplan $J_nJ_{n+1}J^{01}_{n+1}J^{02}_{n+1}J^{03}_{n+1}$; il dépend donc de u et lorsque u varie, il se déplace sur la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$ qui ne dépend que de v.

Le point P_{n+3} est le pôle de l'hyperplan osculateur à la courbe (J_{n+1}) au point J_{n+1} ; il ne dépend donc que de v et appartient à la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$, car les hyperplans osculateurs aux courbes (U_n), ($\overline{U}_n$), (J_{n-2}) en des points homologues appartiennent à un faisceau. La suite de Laplace $\mathcal{P}$, ensemble des points P, se termine donc au point P_{n+3} en présentant le cas de Goursat.

L'espace osculateur à la courbe ($J_{-(n+2)}$) au point $J_{-(n+2)}$ contient les points $J_{-(n-1)}J_{-n}J_{-(n-1)}J_{-(n-2)}$ et ne dépend que de v. Son pôle par rapport à Q est le point P_{-n} qui ne dépend donc que de v et termine la suite $\mathcal{P}$ en présentant le cas de Laplace.

Si les points U_n, $\overline{U}_n$ *sont distincts, les suites de Laplace* $\mathcal{J}$ *et* $\mathcal{P}$ *se terminent aux points* J_{n-2}, P_{-n} *en présentant le cas de Laplace et aux points* $J_{-(n+2)}$ P_{n+4} *en présentant le cas de Goursat.*

4. Passons au cas où les points $U_n, \overline{U}_n$ coïncident et où, comme il a été démontré plus haut, les points $V_{n+2}, \overline{V}_{n+2}$ coïncident également.

Le point J_n, intersection des droites $U_{n-1}U_n, \overline{U}_{n-1}\overline{U}_n$ coïncide avec les points $U_n \equiv \overline{U}_n$ et la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point J_n, qui ne dépend que de v, en présentant le cas de Laplace.

Le point U'_n de la suite L' de S_6 doit coïncider avec le point U_n, car le point J_n appartient à la droite $U'_{n-1}U'_n$. Il importe cependant de remarquer que cela n'implique pas la coïncidence des points V_{n+2} et V'_{n+2}.

asymptotiques gauches appartiennent à des complexes linéaires

Les droites $V_{n+1}V_{n+2}$ et $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$ sont les conjuguées par rapport à Q de l'espace à trois dimensions osculateur à la courbe (U_n) en U_n et sont donc confondues. Le point $J_{-(n+1)}$ intersection des droites V_nV_{n+1}, $V'_nV'_{n+1}$ dépend de u et v. Le point $J_{-(n+2)}$ est l'intersection des droites $V_{n+1}V_{n+2}$ et $V'_{n+1}V'_{n+2}$ et le point $J_{-(n+3)}$ coïncide avec V_{n+2}. Il en résulte que la suite $\mathcal{J}$ se termine au point $J_{-(n+3)}$ en présentant le cas de Goursat.

Occupons-nous maintenant de la suite $\mathcal{P}$.

Le point P_{n+1} est l'intersection des droites $V_n\overline{V}_n$ et $V_{n+1}\overline{V}_{n+1}$, il dépend de u et de v. Le point P_{n+2} est le pôle de l'hyperplan osculateur à la courbe (J_n) au point J_n. Cet hyperplan coïncide évidemment avec l'hyperplan osculateur à la courbe (U_n) au point U_n, puisque les courbes coïncident. Il en résulte que le point P_{n+2} coïncide avec le point V_{n+2} et que la suite $\mathcal{P}$ se termine au point P_{n+2} en présentant le cas de Goursat.

L'hyperplan $J_{-(n+3)}J_{-(n+2)}J_{-(n+1)}J_{-n}J_{-(n-1)}$ coïncide avec l'hyperplan osculateur à la courbe (V_{n+2}) au point V_{n+2} ; il ne dépend que de v. Son pôle par rapport à Q est le point U_n et il en résulte que le point $P_{-(n+1)}$ coïncide avec U_n. La suite $\mathcal{P}$ se termine donc au point $P_{-(n+1)}$ en présentant le cas de Laplace.

Le point $P_{-(n+1)}$ est le transformé de Laplace de P_{-n} dans le sens des v. Ce dernier point se trouve sur la droite $U_{n-1}\overline{U}_{n-1}$.

Lorsque les points U_n, $\overline{U}_n$ *coïncident, les suites de Laplace* $\mathcal{J}$ *et* $\mathcal{P}$ *se terminent aux points* J_n, $P_{-(n+1)}$ *en présentant le cas de Laplace et aux points* $J_{-(n+3)}$, P_{n+2} *en présentant le cas de Goursat.*

5. Supposons que les asymptotiques u des surfaces (x), $(\overline{x})$, nappes focales de la congruence (j), appartiennent à des complexes linéaires que nous désignerons respectivement par Σ, $\overline{\Sigma}$. Une courbe u tracée sur la surface (U) représente la développable des tangentes à une courbe u de (x). Les courbes u de la surface (U) doivent donc appartenir à des hyperplans qui ne peuvent être que les hyperplans contenant les points V, V_1, V_2, V_3. Ces hyperplans ont pour pôles par rapport à Q les points U_1, qui dépendent donc seulement de v. La suite L se termine donc au point U_1 en présentant le cas de Laplace. Il en est de même de la suite $\overline{L}$, qui se termine au point $\overline{U}_1$.

Lorsque U_1 et $\overline{U}_1$ sont distincts, les complexes linéaires Σ et $\overline{\Sigma}$ sont distincts. Un complexe Σ et le complexe homologue $\overline{\Sigma}$ ont en commun une congruence linéaire représentée par l'espace $JJ_{-1}J_{-2}J_{-3}$ osculateur à la courbe (J_{-3}) au point J_{-3}. Ses directrices sont représentées par les points de rencontre de la droite $U_1\overline{U}_1$ avec Q, points qui sont distincts de U_1, $\overline{U}_1$ qui ne peuvent appartenir à cette hyperquadrique.

Désignons par G_1, G_2 les points de la droite V_2V_3 et par $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ ceux de la droite $\overline{V}_2\overline{V}_3$ appartenant à l'hyperquadrique Q. Nous avons démontré que ces points ne dépendent que de v [1]. L'hyperplan polaire de G_1 par exemple contient les points U_1, U_1^{01}, U_1^{02}, U_1^{03} et par conséquent il représente une droite g_1 commune à un complexe Σ et aux trois complexes Σ infiniment voisins successifs du premier. Ces quatre complexes ont en commun la droite g_1 et la droite g_2 représentée par G_2. De même quatre complexes $\overline{\Sigma}$ infiniment voisins successifs ont en commun deux droites $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ représentées par les points $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$.

Le plan des droites V_2V_3, $\overline{V}_2\overline{V}_3$ coupe Q suivant une conique contenant les points G_1, G_2, $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$. Les points de cette conique représentent les génératrices d'une demi-quadrique φ contenant les droites g_1, g_2, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$.

Les droites g_1, g_2, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ appartiennent à une demi-quadrique φ qui ne dépend que de v.

6. Lorsque U_1 et $\overline{U}_1$ coïncident, les courbes u homologues des surfaces (x), $(\bar{x})$ appartiennent à un même complexe linéaire Σ.

On peut montrer que la surface (x) étant donnée, on peut construire la surface $(\bar{x})$, théorème dû à M. Terracini mais que nous démontrons par une autre méthode.

Rappelons tout d'abord que les suites L, $\overline{\text{L}}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{P}$ sont actuellement

$$U_1, U, V, V_1, V_2, V_3\,; \quad U_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \overline{V}_2, V_3\,;$$

$$J_1 = U_1, J, J_{-1}, J_{-2}, J_{-3}, J_{-4} = V_3\,;$$

$$P_{-2} = U_1, P_{-1}, P, P_1, P_2, P_3 = V_3.$$

[1] *Quelques propriétés...* (*loc. cit.*).

Donnons-nous la surface (x), c'est-à-dire la suite L. Le transformé de Laplace de P_{-1} dans le sens des v étant U_1, P_{-1} doit satisfaire à une équation de la forme

$$P^{01}_{-1} + MP_{-1} = NU_1, \tag{1}$$

où M et N sont des fonctions arbitraire de u. Il sera donc obtenu par des quadratures.

Les points U_1 et P_{-1} étant conjugués par rapport à Q et les points U, P_{-1} ne pouvant l'être, on doit choisir la solution P_{-1} de l'équation (1) de manière à avoir

$$\Omega(U_1, P_{-1}) = 0, \quad \Omega(U, P_{-1}) \neq 0,$$

$\Omega(p, q) = 0$ étant la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q.

Le point P_{-1} satisfait à l'équation de Laplace

$$P^{11}_{-1} + M^{10}P_{-1} + MP^{10}_{-1} - [P^{01}_{-1} + MP_{-1}](\log N)^{10} = 0.$$

Le point P, transformé de Laplace de P_{-1} dans le sens des u est

$$P = P^{10}_{-1} - P_{-1}(\log N)^{10}.$$

La droite UP_{-1} doit rencontrer Q au point U et en un second point $\overline{U}$ qui sera donné par

$$\overline{U} = 2\Omega(U, P_{-1})P_{-1} - \Omega(P_{-1}, P_{-1})\, U. \tag{2}$$

On en déduit

$$\overline{U}^{01} + (2M - (\log b)^{01})U = (2N\Omega(U, P_{-1}) - \Omega(P_{-1}, P_{-1}))U_1, \tag{3}$$

de sorte que les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface $(\overline{U})$ passent par un point U_1. En d'autres termes, une courbe u de la surface $(\overline{U})$ appartient à l'hyperplan polaire du point U_1 correspondant.

En dérivant l'équation (3) par rapport à u et en se souvenant que $U_1^{10} = 0$, on voit que le point $\overline{U}$ satisfait à une équation de Laplace. Il en résulte que le point $\overline{U}$ détermine une suite de Laplace dont les transformés de $\overline{U}$ dans le sens des u sont des points $\overline{V}, \overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$. Il reste à démontrer que les droites UV et $\overline{U}\overline{V}$ se rencontrent.

En dérivant l'équation (2) par rapport à u, on voit que $\bar{U}^{10}$ s'exprime en fonction linéaire de $P, P_{-1}, V, U,$ de sorte que ce point appartient au plan UVP, comme le point $\bar{U}$ et par suite la droite $\bar{U}\bar{U}^{10} \equiv \bar{U}\bar{V}$. Le point de rencontre J des droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ représente une droite j d'une congruence ayant pour nappes focales (x) et la surface $(\bar{x})$ correspondant à $\bar{U}\bar{V}$.

Une surface (x) dont les asymptotiques u d'un mode appartiennent à des complexes linéaires Σ est toujours nappe focale d'une congruence W dont la seconde nappe focale a ses asymptotiques u dans les mêmes complexes linéaires.

7. Supposons maintenant que les réglées asymptotiques gauches u des surfaces (x) et $(\bar{x})$ appartiennent à des complexes linéaires. Une réglée asymptotique gauche est le lieu des tangentes aux courbes v de (x) aux points d'une courbe u ; elle est représentée par une courbe u tracée sur la surface (V). Les courbes u de la surface (V) doivent donc appartenir à des hyperplans, c'est-à-dire que les points V, V_1, V_2, V_3, V_4 doivent, lorsque u varie, rester dans un hyperplan. Celui-ci a pour pôle le point U_2, qui ne dépend donc que de v. La suite L se termine au point U_2 en présentant le cas de Laplace. De même, la suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_2$ dans les mêmes conditions. Dans ce qui précède, nous devons donc supposer $n = 2$. Nous désignerons encore par Σ et $\bar{\Sigma}$ les complexes linéaires contenant les réglées gauches u de (x) et de $(\bar{x})$.

Supposons en premier lieu que les points U_2 et $\bar{U}_2$ soient distincts.

La congruence linéaire commune à deux complexes linéaires Σ, $\bar{\Sigma}$ homologues est représentée par l'espace à trois dimensions osculateur à la courbe (J_{-4}). Ses directrices sont les points de rencontre de la droite $U_2\bar{U}_2$ avec Q.

Les points de rencontre G_1, G_2 de la droite V_3V_4 avec Q ne dépendent que de v ; ils représentent les droites g_1, g_2 communes à un complexe Σ et aux trois complexes Σ infiniment voisins successifs du premier. De même, les points $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ où la droite $\bar{V}_3\bar{V}_4$ rencontre Q ne dépendent que de v et représentent deux droites $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ communes à un complexe $\bar{\Sigma}$ et aux trois complexes $\bar{\Sigma}$ infiniment voisins successifs du premier.

Pour une valeur de v, les droites $g_1, g_2, \bar{g}_1, \bar{g}_2$ appartiennent à une même demi-quadrique dont les génératrices sont représentées par les points de la conique section de Q par le plan des droites $V_3V_4, \bar{V}_3\bar{V}_4$.

8. Lorsque les points U_2, $\bar{U}_2$ coïncident, les suites $\mathcal{J}$ et $\mathcal{P}$ s'arrêtent aux points J_2 et P_{-3} qui coïncident également avec U_2. Les complexes Σ et $\bar{\Sigma}$ coïncident.

Supposons que la surface (x), c'est-à-dire la suite L, soit donnée. Nous allons construire la suite $\bar{L}$, c'est-à-dire la surface $(\bar{x})$.

La transformée de Laplace de P_{-2} dans le sens des v étant le point U_2, nous pouvons écrire

$$P^{01}_{-2} + MP_{-2} = NU_2,$$

M et N étant des fonctions arbitraires (différentiables) de u. On obtient le point P_{-2} par quadratures et on a la relation

$$P^{11}_{-2} + MP^{10}_{-2} + M^{10}P_{-2} = (P^{01}_{-2} + MP_{-2}) (\log N)^{10}.$$

On voit donc que le point P_{-2} satisfait à une équation de Laplace. Le point P_{-1} transformé de P_{-2} dans le sens des u est donné par

$$P_{-1} = P^{10}_{-2} - P_{-2} (\log N)^{10}.$$

Le point $\bar{U}_1$ doit appartenir à la droite U_1P_{-2} et nous poserons

$$\bar{U}_1 = U_1 + \lambda P_{-2},$$

λ étant déterminé par la condition que la tangente à une courbe v tracée sur la surface $(\bar{U}_1)$ passe par un point U_2. On trouve que l'on doit avoir

$$(\log bh_1)^{01} - (\log \lambda)^{01} + M = 0,$$

d'où $\lambda = M_1 bh_1 e^{\varepsilon M}$, M_1 étant une fonction arbitraire de u. On a alors

$$\bar{U}^{01}_1 = U_2(1 + \lambda N) + \bar{U}_1((\log \lambda)^{01} - M.$$

On en déduit, en dérivant par rapport à u, que le point $\bar{U}_1$

satisfait à une équation de Laplace. Les tangentes aux courbes v aux différents points d'une courbe u de la surface $(\overline{U}_1)$ passent par un même point U_2.

Le point $\overline{U}_1$ détermine une suite de Laplace $U_2, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \ldots, \overline{V}_4$ qui s'arrête aux points U_2 et V_4 dans les mêmes conditions que la suite L. Pour notre objet, il reste à démontrer que les droites UU_1 et $\overline{U}\overline{U}_1$ se coupent en un point J_1.

En dérivant $\bar{\overline{U}}_1$ par rapport à u, on voit que le point $\overline{U}_1^{10}$ s'exprime en fonction linéaire des points U, P_{-2}, P_{-1}, c'est-à-dire qu'il appartient au plan $UP_{-1}P_{-2}$, ou encore au plan $U_1\overline{U}_1P_{-1}U$, car les points $U_1, \overline{U}_1, P_{-1}, P_{-2}$ sont en ligne droite On en conclut que la droite $\overline{U}_1\overline{U}$ appartient à ce plan et qu'elle rencontre la droite UU_1 en un point J_1. A la suite $\overline{L}$ est donc attachée une surface $(\bar{x})$ répondant à la question.

Une surface (x) *dont les réglées gauches asymptotiques* u *d'un mode appartiennent à des complexes linéaires* Σ *est toujours nappe focale d'une congruence* W *dont la seconde nappe focale* $(\overline{x})$ *a ses réglées asymptotiques gauches* u *appartenant aux mêmes complexes linéaires.*

Liège, le 15 avril 1963.