Une surface canonique de l'espace à six dimensions

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface d'ordre 32 dans un espace linéaire à six dimensions dont les sections hyperplanes constituent le système canonique.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une surface canonique de l'espace à six dimensions,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface d'ordre 32 dans un espace linéaire à six dimensions dont les sections hyperplanes constituent le système canonique.

On sait que l'intersection complète de quatre hyperquadriques dans un espace linéaire à six dimensions est une surface canonique, c'est-à-dire une surface dont les courbes canoniques sont les sections hyperplanes. Dans cette note, nous construisons une autre surface possédant la même propriété. Cette surface est d'ailleurs un cas particulier d'une surface que nous avons construite récemment mais qui n'est une surface canonique que dans le cas envisagé actuellement (1).

Considérons dans un espace linéaire S_9 à neuf dimensions deux plans σ_2, σ_2' et un espace à trois dimensions σ_3 ne se rencontrant pas deux à deux, une conique γ dans σ_2, une conique γ' dans σ_2' et une quadrique Q dans σ_3. Les plans s'appuyant en un point sur γ, γ' et Q forment une variété V_6^8 d'ordre huit. Considérons en outre une hypersurface du quatrième ordre V_8^4 passant deux fois par la réglée lieu des droites s'appuyant sur les coniques γ, γ'. La section de l'intersection des variétés V_6^8, V_8^4 par un espace linéaire à six dimensions est une surface canonique d'ordre 32, possédant quatre points quadruples coplanaires.

Nous obtenons cette surface comme image d'une involution cyclique du quatrième ordre, privée de points unis, appartenant à la surface intersection complète de cinq hyperquadriques dans un espace linéaire à sept dimensions. Il en résulte que l'hypersurface V_8^4 est une variété particulière.

(1) *Sur la construction de certaines surfaces algébriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1962, pp. 146-150).

1. Considérons dans un espace linéaire S_7 à sept dimensions l'homographie H de période quatre

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & -x_2 & -x_3 & ix_4 & ix_5 & -ix_6 & -ix_7 \\ x_0 & x_2 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

et une surface F intersection de cinq hyperquadriques d'équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2(x_0, x_1) + \beta_2(x_2, x_3) + \gamma_{11}(x_4, x_5\,;\, x_6, x_7) &= 0, \\ \alpha_2'(x_0, x_1) + \beta_2'(x_2, x_3) + \gamma_{11}'(x_4, x_5\,;\, x_6, x_7) &= 0, \\ \alpha_2''(x_0, x_1) + \beta_2''(x_2, x_3) + \gamma_{11}''(x_4, x_5\,;\, x_6, x_7) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x_4, x_3) + \psi_2(x_6, x_7) + \chi_{11}(x_0, x_1\,;\, x_2, x_3) &= 0, \\ \varphi_2'(x_4, x_3) + \psi_2'(x_6, x_7) + \chi_{11}'(x_0, x_2\,;\, x_1, x_3) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

où α_2, α_2', α_2'', …, β_2'', φ_2, φ_2', ψ_2, ψ_2', sont des formes algébriques du second degré et γ_{11}, γ_{11}', γ_{11}'', χ_{11}, χ_{11}' des formes bilinéaires.

La surface F est d'ordre 32 ; elle est transformée en soi par l'homographie H et celle-ci détermine sur la surface une involution I du quatrième ordre.

En appelant 0_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i, on voit que les quatre axes ponctuels de l'homographie H sont les droites $0_0 0_1$, $0_2 0_3$, $0_4 0_5$, $0_6 0_7$.

L'homographie

$$H^2 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

est involutive et détermine sur F une involution d'ordre deux ; elle a pour axes ponctuels les espaces à trois dimensions $0_0 0_1 0_2 0_3$, $0_4 0_5 0_6 0_7$. La surface F ne rencontre pas ces espaces et par conséquent l'involution engendrée sur F par H^2 est privée de points unis. Par suite, il en est de même de l'involution I.

2. Le système canonique $|C|$ de F est découpé par les hyperquadriques. Les hyperquadriques de S_7 linéairement indépendantes sont au nombre de 36, par suite, puisque la surface F appartient à cinq de ces hyperquadriques, le genre arithmétique de cette surface est $p_a = 31$. Son genre linéaire est $p^{(1)} = 129$.

Soit F' une image de l'involution I. Entre les genres arithmétiques $p_a = 31$ de F et p'_a de F' nous avons la relation

$$p_a + 1 = 4(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 7$.

Entre les genres linéaires $p^{(1)} = 129$ de F et $p'^{(1)}$ de F', nous avons la relation

$$p^{(1)} - 1 = 4(p'^{(1)} - 1),$$

d'où $p'^{(1)} = 33$.

Les hyperquadriques de S_7 transformées en elles-mêmes par H forment quatre systèmes linéaires caractérisés par le fait que la substitution H sur leurs équations reproduit celles-ci multipliées respectivement par 1, -1, i, $-i$. Les deux premiers systèmes ont la dimension neuf et les deux derniers la dimension sept. Si l'on tient compte du fait que les hyperquadriques (1) appartiennent au premier système, les hyperquadriques de celui-ci découpent sur F un système linéaire $|C_0|$ de dimensions six. Les hyperquadriques (2) appartiennent au second système, donc celui-ci découpe sur F un système $|C_1|$ de dimension sept. Les deux derniers systèmes découpent sur F des systèmes de courbes $|C_3|$, $|C_3|$ de dimension sept également.

Le système canonique $|C|$ de F contient donc quatre systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ appartenant à l'involution I. Nous avons démontré que celui de ces systèmes qui correspond au système canonique $|C'|$ de F' est le système de dimension minimum, c'est-à-dire actuellement $|C_0|$.

Observons que les hyperquadriques du premier système passent par les droites $0_4 0_5$, $0_6 0_7$.

3. Pour obtenir les équations de la surface F', nous devons rapporter projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S_6 à six dimensions.

Posons

$$\rho X_{jk} = x_j x_k, \ (j, k = 0, 1 \text{ ou } j, k = 2, 3),$$

$$\rho X_{jk} = x_j x_k, \ (j = 4, 5 \,; k = 6, 7),$$

et interprétons les X comme les coordonnées d'un espace S_9 à neuf dimensions.

Nous avons

$$X_{00}X_{11} - X_{01}^2 = 0, \tag{3}$$

$$X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0, \tag{4}$$

$$X_{46}X_{57} - X_{47}X_{56} = 0, \tag{5}$$

Dans le plan σ_2 d'équations $X_{22} = X_{23} = \dots = X_{57} = 0$, l'équation (3) représente une conique γ.

Dans le plan σ'_2 d'équations $X_{00} = X_{01} = X_{11} = 0$, $X_{46} = X_{47} = X_{65} = X_{57} = 0$, l'équations (4) représente une conique γ'.

Dans l'espace à trois dimensions σ_3 d'équations $X_{00} = X_{01} = \dots = X_{33} = 0$, l'équation (5) représente une quadrique Q.

Dans l'espace S_9, l'équation (3) représente le cône projetant γ de l'espace à six dimensions déterminé par σ_2', σ_3. L'équation (4) représente le cône projetant γ' de l'espace à six dimensions contenant σ_2 et σ_3. Enfin l'équation (5) représente le cône projetant la quadrique Q de l'espace à cinq dimensions contenant les plans σ_2, σ_2'. Les trois équations simultanées représentent la variété V_6 lieu des plans s'appuyant en un point sur γ, en un point sur γ' et en un point sur Q. Cette variété est d'ordre huit, V_6^8, et passe quatre fois par γ, γ' et Q.

Les points de la variété V_6^8 représentent les groupes de quatre points de l'involution J engendrée par l'homographie H dans l'espace S_7, par conséquent un point de V_6^8 correspond à ∞^1 groupes de J.

Considérons un point P_0 sur 0_00_1, un point P_1 sur 0_20_3, un point P_2 sur 0_40_5 et enfin un point P_3 sur 0_60_7. A ces quatre points correspondent un point P_0' sur γ, un point P_1' sur γ' et un point P' sur Q. Aux ∞^3 groupes de J situés dans le tétraèdre $P_0P_1P_2P_3$ correspondent les points du plan $P_0'P_1'P'$. Projetons le tétraèdre $P_0P_1 P_2P_3$ sur $0_00_20_40_6$, le plan $P_0'P_1'P'$ devient le plan $0_{00}0_{22}0_{46}$. Les hyperquadriques du premier système considéré plus haut donnent, dans le tétraèdre $0_00_20_40_6$ les quadriques

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 x_4 x_6 = 0,$$

qui touchent en 0_4, 0_6 respectivement les plans $0_00_20_4$ et $0_00_20_6$.

A un point Y_{00}, Y_{22}, Y_{46} du plan $0_{00}0_{22}0_{46}$ correspondent les groupes de J situés sur les quadriques

$$\frac{x_0^2}{Y_{00}} = \frac{x_2^2}{Y_{22}} = \frac{x_4 x_6}{Y_{46}}.$$

Ces quadriques ont en commun deux coniques passant par 0_4, 0_6, unies par H^2 et transformées l'une dans l'autre par H. Les ∞^1 groupes de J situés sur ces coniques correspondent au point Y_{00}, Y_{22}, Y_{46}.

On peut voir qu'à un groupe de l'involution I correspond un seul point de F' et inversement. Cela résultera d'ailleurs à posteriori de la comparaison des ordres des surfaces F et F'.

4. La surface F' appartient à la variété V_6^8 et aux trois hyperplans ξ, ξ', ξ'' de S_9 qui correspondent aux hyperquadriques (1). Ces trois hyperplans ont en commun un espace S_6 à six dimensions dans lequel F' est une surface normale.

Considérons maintenant les hyperquadriques (2). En posant $x_1 = \lambda_1 x_0$, $x_3 = \lambda_0 x_0$, $x_5 = \mu x_4$, $x_7 = \nu x_6$, on a

$$x_4^2\varphi_0(1, \mu) + x_6^2\psi_2(1, \nu) + x_0 x_2 \chi_{11}(1, \lambda_1 ; 1, \lambda_2) = 0,$$

$$x_4^2\varphi_2(1, \mu) + x_6^2\psi_2(1, \nu) + x_0 x_2 \chi'_{11}(1, \lambda_2 ; 1, \lambda_2) = 0,$$

d'où

$$\rho' x_4^2 = \begin{vmatrix} \psi_2(1, \nu) & \chi_{11}(1, \lambda_1 ; 1, \lambda_2) \\ \psi'_2(\lambda, \nu) & \chi'_{11}(1, \lambda_1 ; 1, \lambda_2) \end{vmatrix},$$

$$\rho' x_6^2 = \begin{vmatrix} \chi_{11}(1, \lambda_1 ; 1, \lambda_2) & \varphi_2(1, \mu) \\ \chi'_{11}(1, \lambda_4 ; 1, \lambda_2) & \varphi'_2(1, \mu) \end{vmatrix},$$

$$\rho' x_0 x_2 = \begin{vmatrix} \varphi_2(1, \mu) & \psi_2(1, \nu) \\ \varphi'_2(1, \mu) & \psi'_2(1, \nu) \end{vmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} \psi_2(x_6, x_7) & \chi_{11}(x_0, x_1 ; x_2, x_3) \\ \psi'_2(x_6, x_7) & \chi'_{11}(x_0, x_1 ; x_2, x_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi_{11} & \varphi_2 \\ \chi'_{11} & \varphi'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \psi_2 \\ \varphi'_2 & \psi'_2 \end{vmatrix}$$

et par suite

$$\psi_2\chi'_{11} - \psi'_2\chi_{11} = \chi_{11}\varphi'_2 - \chi'_{11}\varphi_2 = \varphi_2\psi'_2 - \varphi'_2\psi_2.$$

Enfin, on a

$$(\psi_2\chi'_{11} - \psi'_2\chi_{11})\,(\chi_{11}\varphi'_2 - \chi'_{11}\varphi_2) = (\varphi_2\psi'_2 - \varphi'_2\psi_2)^2,$$

que nous écrirons

$$\chi_{11}\chi'_{11}(\psi_2\varphi'_2 + \psi'_2\varphi_2) - \chi_{11}^2\varphi'_2\psi'_2 - \chi'^2_{11}\varphi_2\psi_2 = (\varphi_2\psi'_2 - \varphi'_2\psi_2)^2.$$

Observons que l'on a

$$\varphi_2(x_4, x_5)\,\psi_2(x_6, x_7) = \Phi_2(\chi_{46}, \chi_{47}, \chi_{56}, \chi_{57}),$$

$$\varphi'_2(x_4, x_5)\,\psi'_2(x_6, x_7) = \Phi'_2(\chi_{46}, \chi_{47}, \chi_{56}, \chi_{57}),$$

$$\varphi_2(x_4, x_5)\,\psi'_2(x_6, x_7) = \Psi_2(\chi_{46}, \chi_{47}, \chi_{56}, \chi_{57}),$$

$$\varphi'_2(x_4, x_5)\,\psi_2(x_6, x_7) = \Psi'_2(\chi_{46}, \chi_{47}, \chi_{56}, \chi_{57}),$$

$$\chi_{11}^2(x_0, x_1\,;\, x_3, x_3) = \Phi_{11}(\chi_{00}, \chi_{01}, \chi_{11}\,;\, \chi_{22}, \chi_{23}, \chi_{33}),$$

$$\chi'^2_{11}(x_0, x_1\,;\, x_2, x_3) = \Theta'_{11}(\chi_{00}, \chi_{01}, \chi_{11}\,;\, \chi_{22}, \chi_{23}, \chi_{33}),$$

$$\chi_{11}\ \chi'_{11} = \Theta''_{11}(\chi_{00}, \chi_{01}, \chi_{11}\,;\, \chi_{22}, \chi_{13}, \chi_{33}).$$

On en conclut que la surface F′ appartient à l'hypersurface du quatrième ordre

$$(\Psi_2 - \Psi'_2)^2 - (\Psi_2 + \Psi'_2)\Theta''_{11} + \Phi_2\Theta'_{11} + \Phi'_2\Theta_{11} = 0. \qquad (6)$$

L'hypersurface (6) ne passe pas par Q mais passe trois fois par les plans σ_2, σ'_2 des coniques γ, γ'. Il en résulte qu'elle contient l'espace σ_5 déterminé par ces deux plans. Elle passe précisément deux fois par cet espace comme on le voit aisément en considérant les intersections de l'hypersurface avec une droite passant par un point de l'espace σ_5.

5. Comme on l'a vu, la surface F′ se trouve dans l'espace S_6 intersection des hyperplans ξ, ξ', ξ'' de S_9. Nous supposerons ici que ces hyperplans se trouvent dans la situation la plus générale possible. Dans ces conditions, l'espace S_6 ne rencontre pas les plans σ_2, σ'_2 et rencontre l'espace σ_3 en un point qui ne peut appartenir à F′ puisqu'il n'appartient pas à l'hypersurface (6). L'espace S_6 rencontre la variété V_6^8 suivant une variété V_3^8.

L'espace S_6 coupe l'espace σ_5 suivant un plan τ_2 et l'hypersurface (6) suivant une variété V_5^4 ayant le plan double τ_2.

Cherchons quelle est l'intersection du plan τ_2 avec la variété V_6^8. Observons que l'espace σ_5 est le sommet du cône quadratique (5) et est donc double pour ce cône. L'espace σ_5 contient les droites joignant les points des coniques γ, γ'. Ces droites forment une réglée d'ordre quatre V_3^4 qui, comptée deux fois, forme l'intersection de σ_5 et de V_8^6. Cette réglée rencontre un plan de σ_5 et en particulier le plan τ_2 en quatre points A_1, A_2, A_3, A_4.

La surface F' est l'intersection des variétés V_3^8 et V_5^4, c'est-à-dire une surface d'ordre 32. Les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont doubles pour les deux variétés donc ils sont quadruples pour la surface F'.

Ainsi donc, *la surface canonique F' est d'ordre 32 et possède quatre points quadruples coplanaires.*

On observera que le système canonique $|C|$ de F a le degré 4.32, donc le système canonique $|C'|$ de F' doit avoir le degré 32, ce qui prouve qu'à un point de F' correspond bien un seul groupe de l'involution I.

6. Les hyperplans

$$x_1 + \lambda x_0 = 0$$

découpent sur F des courbes Γ_1 appartenant à l'involution I. Il leur correspond sur F' des courbes Γ'_1 découpées par les espaces à quatre dimensions

$$X_{01} + \lambda X_{00} = 0, \quad X_{11} + \lambda X_{01} = 0.$$

Le long d'une courbe Γ'_1, il existe un hyperplan

$$\lambda_2 X_{00} + 2\lambda X_{01} + X_{11} = 0$$

touchant la surface F'. Celle-ci est donc l'enveloppe de ces hyperplans, ce qui résulte d'ailleurs de l'équation (3).

De même, l'hyperplan

$$\lambda_2 X_{22} + 2\lambda X_{23} + X_{33} = 0$$

touche F' le long d'une courbe Γ'_2 appartenant à l'espace

$$X_{23} + \lambda X_{22} = 0, \quad X_{33} + \lambda X_{23} = 0$$

et qui correspond à la courbe Γ_2 découpée sur F par l'hyperplan

$$x_3 + \lambda x_2 = 0.$$

Les hyperplans

$$x_5 + \lambda x_4 = 0, \quad x_7 + \mu x_6 = 0$$

découpent respectivement sur F des courbes Γ_3, Γ_4 appartenant à l'involution I. Il leur correspond sur F′ des courbes appartenant aux espaces à quatre dimensions

$$X_{56} + \lambda X_{46} = 0, \quad X_{57} + \lambda X_{47} = 0,$$

$$X_{47} + \mu X_{46} = 0, \quad X_{57} + \mu X_{56} = 0.$$

Une courbe Γ_3' et une courbe Γ_4' appartiennent à l'hyperplan

$$\mu(X_{56} + \lambda X_{46}) + X_{57} + \lambda X_{47} = 0.$$

On a donc

$$2\Gamma_1' \equiv 2\Gamma_2' \equiv C', \quad \Gamma_3' + \Gamma_4' \equiv C'.$$

Les sections hyperplanes de la surface F ont le genre 49, donc les courbes Γ_1', Γ_2', Γ_3', Γ_4' sont de genre 13. Elles ont d'autre part le degré huit.

Comme nous l'avons remarqué dans notre note citée plus haut, l'hypersurface (6) touche l'espace $X_{00} = X_{01} = X_{11} = X_{22} = X_{23} = X_{33} = 0$ le long de son intersection avec l'hypersurface (conique)

$$\Psi_2 - \Psi_2' = 0.$$

Actuellement, l'espace S_7 ne rencontrant cet espace qu'en un point, la propriété ne donne pas lieu à une propriété analogue pour la surface F′.

Observons encore que F′ étant l'image d'une involution d'ordre quatre privée de points unis, son diviseur de Severi est $\sigma = 4$.

Liège, le 16 mars 1962.