Une propriété des homographies cycliques hyper-spatiales

Lucien Godeaux

Résumé
Étant donnée une homographie cyclique hyperspatiale de période impaire, on peut représenter l'involution qu'elle engendre par une variété V lieu d'un espace linéaire s'appuyant sur une variété de Veronese et sur un certain nombre de variétés de Segre. La variété V est la plus générale de son espèce.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Une propriété des homographies cycliques hyperspatiales,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étant donnée une homographie cyclique hyperspatiale de période impaire, on peut représenter l'involution qu'elle engendre par une variété V lieu d'un espace linéaire s'appuyant sur une variété de Veronese et sur un certain nombre de variétés de Segre. La variété V est la plus générale de son espèce.

En cherchant à construire certaines surfaces images d'involutions appartenant à une surface algébrique, nous avons rencontré la propriété qui fait l'objet de cette note. Étant données dans un espace linéaire une variété de Veronese et des variétés de Segre appartenant à des espaces qui ne se rencontrent pas deux à deux, la variété lieu des espaces linéaires s'appuyant en un point sur chacune de ces variétés est l'image d'une involution engendrée par une homographie périodique dans un espace linéaire.

Nous considérons dans un hyperespace de dimension suffisamment élevée une homographie H de période impaire $p = 2\nu + 1$ possédant p axes ponctuels, et un système linéaire d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par l'homographie. En rapportant projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un hyperespace, on obtient une variété V image de l'involution. Aux axes ponctuels de l'homographie correspondent une variété de Veronese et ν variétés de Segre. La variété V est le lieu d'un espace linéaire à ν dimensions s'appuyant sur la variété de Veronese et sur les variétés de Segre. A un point de V correspondent ∞^{ν}, groupes de l'involution engendrée par l'homographie H.

On pourrait obtenir une propriété analogue en partant d'une homographie cyclique de période paire. Le procédé à utiliser est en tout point analogue.

1. Considérons dans une espace linéaire S_r à $r = r_0 + r_1 + \dots + r_{p-1} + p - 1$ dimensions, $p = 2\nu + 1$ étant un nombre impair, p espaces linéaires $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ respectivement à $r_0, r_1, \dots, r_{p-1}$ dimensions, ne se rencontrant pas deux à deux. Désignons par x_{ki} $(i = 0, 1, \dots, r_k)$ les coordonnées projectives homogènes des points de l'espace σ_k de telle sorte que les $r + 1$ nombres x_{ki} soient les coordonnées projectives homogènes d'un point de S_r.

Considérons, dans S_r, l'homographie H de période p,

$$\begin{array}{ll}
\rho x'_{0i} = x_{0i} & (i = 0, 1, \dots, r_0), \\
\rho x'_{1i} = \epsilon x_{1i} & (i = 0, 1, \dots, r_1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\rho x'_{ki} = \epsilon^k x_{ki} & (i = 0, 1, \dots, r_k), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\rho x'_{p-1,\,i} = \epsilon^{p-1} x_{p-1,\,i} & (i = 0, 1, \dots, r_{p-1}),
\end{array}$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Les axes ponctuels de l'homographie H sont $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$.

Il existe p systèmes linéaires d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H. Considérons l'un d'eux, d'équation

$$\begin{aligned}
\alpha_2(x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0r_0}) &+ \alpha_{1,1}^{(1)}(x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1r_1} ; x_{p-1,\,0}, x_{p-1,\,1}, \dots, x_{p-1,\,r_{p-1}}) \\
&+ \dots + \alpha_{1,1}^{(k)} (x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{kr_k} ; x_{k-k,\,0}, \dots, x_{p-k,\,r_{p-k}}) + \dots \\
&+ \alpha_{s,1}^{(v)} (x_0, x_1, \dots, x_{vr_v} ; x_{v-1,\,0}, \dots, x_{v+1,\,r_{v+1}}) = 0. \qquad (1) \\
&(k = 1,\ 2,\ \dots,),
\end{aligned}$$

où α_2 est une forme quadratique et $\alpha_{1,1}^{(1)}, \alpha_{1,1}^{(2)}, \dots, \alpha_{1,1}^{(v)}$ sont des formes bilinéaires. Observons que ces hyperquadriques passent par les axes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$.

Ce système a la dimension

$$\rho = \binom{r_0 + 2}{2} + (r_1 + 1)\,(r_{p-1} + 1) + \dots + (r_v + 1)\,(r_{v+1} + 1) - 1.$$

2. Rapportons projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'une espace $S\rho$ à ρ dimensions en posant

$$\left.\begin{array}{ll}
\rho X_{ij}^{(0)} = x_{0i}x_{0j}, & (i, j = 0, 1, \ldots, r_0), \\
\rho X_{ij}^{(1)} = x_{1i}x_{p-1,\,j}, & (i = 0, 1, \ldots, r_1\,;\, j = 0, 1, \ldots, r_{p-1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\rho X_{ij}^{(k)} = x_{ki}x_{p-k,\,j}, & (i + 0, 1, \ldots, r_k\,;\, j = 0, 1, \ldots, r_{p-k}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\rho X_{ij}^{(\nu)} = x_{\nu i}x_{\nu+1,\,j}, & (i = 0, 1, \ldots, r_\nu\,;\, j = 0, 1, \ldots, r_{\nu+1}).
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Nous désignerons par σ_0' l'espace à $\rho_0 = \binom{r_0+2}{2}$ dimensions obtenu en annulant les coordonnées X des ν dernières lignes (2), par σ_1' l'espace à $\rho_1 = (r_1 + 1)(r_{p-1} + 1) - 1$ dimensions obtenu en annulant les X de la première ligne et des $\nu - 1$ dernières lignes (2), ..., par σ_ν' l'espace à $\rho\nu = (r_\nu + 1)(r_{\nu+1} + 1) - 1$ dimensions obtenu en annulant les X des ν premières lignes (2).

Des équations (2), on déduit

$$|X_{ij}^{(0)}| = 0,\ |X_{ij}^{(1)}| = 0,\ \ldots,\ |X_{ij}^{(k)}| = 0,\ \ldots,\ |X_{ij}^{(\nu)}| = 0, \qquad (3)$$

les déterminants des premiers membres ayant la caractéristique un.

Le premier groupe d'équations représente, dans l'espace σ_0', la variété de Veronese Φ, de dimension r_0, représentant les hyperquadriques de l'espace σ_0. Cette variété est d'ordre 2^{r_0}. Dans l'espace $S\rho$, les mêmes équations représentent le cône projetant Φ de l'espace linéaire de dimension minimum contenant σ_1', σ_2', ..., σ_ν'.

Dans l'espace σ_1', le second groupe d'équations (3) représente la variété de Segre Ω_1 image des couples de points des espaces σ_1 et σ_{p-1}. C'est une variété à $r_1 + r_{p-1}$ dimensions, d'ordre $\dfrac{(r_1 + r_{p-1})\,!}{r_1\,!\,r_{p-1}\,!}$. Dans l'espace $S\rho$, les mêmes équations représentent le cône projetant Ω_1 de l'espace de dimension minimum contenant σ_0', σ_2', ..., σ_ν'.

De même, dans les espaces σ_2', σ_3', ..., σ_ν' on obtient une variété de Segre. On désignera par Ω_k celle qui appartient à l'espace σ_k' ; sa dimension est égale à $r_k + r_{p-k}$ et son ordre est $\dfrac{(r_k + r_{p-k})\,!}{r_k\,!\,r_{p-k}\,!}$.

Dans l'espace $S\rho$, les équations (3) représentent une variété V à

$$r_0 + r_1 + \dots + r_{p-1} + \nu = r - \nu$$

dimensions, lieu des espaces linéaires à ν dimensions déterminés par $\nu + 1$ points dont l'un est sur Φ et les autres un sur chacune des variétés Ω_1, Ω_2, ..., $\Omega\nu$.

3. Soient P_0 un point de σ_0, P_1 un point de σ_1, ..., P_{p-1} un point de σ_p. Ces points déterminent un espace linéaire S_{p-1} à $p - 1$ dimensions transformé en soi par l'homographie H.

Au point P_0 correspond sur Φ un point P'_0, au couple de points P_1, P_{p-1} correspond sur Ω_1 un point P'_1, ..., au couple de points P_v, P_{v+1} correspond sur Ω_v un point P'_v. Ces points P'_0, P'_1, ..., P'_v déterminent un espace linéaire S'_v à ν dimensions qui appartient à la variété V.

Dans l'espace S_r, l'homographie H détermine une involution I d'ordre p représentée par la variété V. Aux ∞^{p-1} groupes de l'involution I situés dans l'espace S_{p-1} correspondent les points de l'espace S'_v, donc à un point de celui-ci correspondent ∞^ν groupes de I appartenant à l'espace S_{p-1}.

Appelons O_{00} le point de σ_0 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première x_{00}, O_{10} le point de σ_1 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première x_{10}, ..., O_{p-10} le point de σ_{p-1} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première x_{p-10}.

Considérons les hyperquadriques découpées sur S_{p-1} par les hyperquadriques (1) et projetons cet espace sur l'espace $S_{p-1} = O_{00}O_{10}\dots O_{p-1,0}$. Dans cet espace nous obtenons le système linéaire d'hyperquadriques dont l'équation peut s'écrire

$$\lambda_0 x_{00}^2 + \lambda_1 x_{10} x_{p-10} + \dots + \lambda_k x_{k0} x_{p-k0} + \dots + \lambda_v x_{v0} x_{v+10} = 0. \quad (4)$$

Ces hyperquadriques passent par les points O_{10}, O_{20}, ..., O_{p-10}, chacune d'elles contient ∞^{p-2} groupes de l'involution I et par conséquent ν de ces hyperquadriques linéairement indépendantes contiennent ∞^ν groupes de I.

A l'espace S_{p-1} correspond dans $S\rho$ l'espace $S_v^0 \equiv O_{00}^{(0)} O_{00}^{(1)} \dots O_{00}^{(v)}$ dont les équations s'obtiennent en annulant tous les X sauf les premiers de chaque ligne dans les équations (2).

Considérons un point Y de S dont nous écrirons les coordonnées sous la forme $Y^0, Y^1, \dots, Y^\nu$. Aux hyperplans de S_0 passant par ce point correspondent dans $S_p{}^0{}_1$ la variété d'équations

$$\frac{x_{00}^2}{y^0} = \frac{x_{10}\,x_{p-10}}{y_1} = \dots = \frac{x_{\nu 0}\,x_{\nu-10}}{y^\nu},$$

variété formée de ∞^ν groupes de l'involution I.

4. Inversement, donnons-nous les équations (3) où les nombres $r_0, r_1, \dots, r_{p-1}$ sont choisis arbitrairement. Elles représentent une variété V lieu des espaces linéaires à ν dimensions s'appuyant en un point sur la variété de Veronese et sur les ν variétés de Segre, la plus générale possible. Elle est l'image d'une involution d'ordre $p = 2\nu + 1$ engendrée par une homographie cyclique d'ordre p dans un espace linéaire.

Liège, le 6 mars 1962.