Bulletin de la Classe des sciences

Sur certaines congruences W

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des congruences W de droites dont l'image sur l'hyperquadrique de Klein satisfait à une équation de Laplace réduite à son premier terme.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur certaines congruences W. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 48, 1962. pp. 8-16;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1962.65412;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1962_num_48_1_65412;

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur certaines congruences W,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination des congruences W de droites dont l'image sur l'hyperquadrique de Klein satisfait à une équation de Laplace réduite à son premier terme.

On sait que la droite g d'une congruence W est représentée sur l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 par un point G satisfaisant à une équation de Laplace, les variables étant les paramètres u, v des asymptotiques des surfaces focales de la congruence (Darboux). Dans nos recherches de Géométrie projective différentielle, nous avons rencontré à plusieurs reprises des congruences W telles que l'équation de Laplace à laquelle satisfait le point G peut se réduire, par un choix convenable du facteur de proportionnalité des coordonnées homogènes du point G, à un seul terme $D_{uv}G = 0$ (1). Nous nous sommes proposé de déterminer les congruences satisfaisant à cette propriété. Nous arrivons au théorème suivant :

Si (g) *est une congruence* W *telle que les points* G *qui représentent ses droites sur l'hyperquadrique de Klein satisfont à la relation* $D_{uv}G = 0$, *c'est :*

1) *Une congruence à laquelle est associée une quadrique fixe.*

(1) Voir par exemple notre note *Sur une surface liée à une suite de Laplace terminée dans les deux sens* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1961, pp. 1085-1091).

A chaque droite g *correspond sur cette quadrique un quadrilatère gauche dont les diagonales déterminent sur la droite* g *ses foyers, les plans focaux contenant chacun une de ces diagonales.*

2) *Une congruence engendrée par les génératrices rectilignes de* ∞^1 *quadriques passant par deux droites gauches et de même mode que ces droites.*

3) *Une congruence engendrée par* ∞^1 *faisceaux de rayons contenant une droite fixe.*

1. Soient (g) une congruence W, (x_1), (x_2) ses surfaces focales, ξ_1, ξ_2 ses plans focaux, ξ_1 étant tangent en x_1 à la surface (x_1), ξ_2 en x_2 à la surface (x_2), u, v les asymptotiques des surfaces focales. Soit G le point de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, représentant une droite g. Le point G satisfait à une équation de Laplace, les variables étant u, v. Supposons que, par un choix convenable du facteur de proportionnalité des coordonnées homogènes de point G, cette équation soit

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{ou} \quad G^{11} = 0.$$

Chacune des coordonnées du point G est somme d'une fonction arbitraire de u et d'une fonction arbitraire de v. Désignons par A un point de S_5 dont les coordonnées homogènes sont des fonctions arbitraires de u et par B un point dont les coordonnées homogènes sont des fonctions arbitraires de v. On peut supposer que l'on a

$$G = A + B$$

Soit $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous poserons

$$\Omega(A,A) = \alpha, \ \Omega(B, B) = \beta,$$

α étant une fonction de u seul et β une fonction de v seul. Nous supposerons pour plus de généralité que α et β ne sont pas identiquement nuls.

Un point de la droite AB a des coordonnées de la forme $\lambda A + \mu B$. Ceux de ces points qui appartiennent à Q sont donnés par

$$\lambda^2 \Omega(A, A) + 2\lambda\mu\Omega(A, B) + \mu^2\Omega(B, B) = 0 \qquad (1)$$

Le point G étant un de ces points, on a

$$\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{A}) + 2\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + \Omega(\mathrm{B}, \mathrm{B}) = 0,$$

d'où

$$2\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = -(\alpha + \beta) \tag{2}$$

L'équation (1) devient

$$(\alpha\lambda - \beta\mu)(\lambda - \mu) = 0$$

Le second point d'intersection de la droite AB avec Q peut donc être représenté par

$$\mathrm{G}_1 = \frac{\mathrm{A}}{\alpha} + \frac{\mathrm{B}}{\beta}$$

et on a également $\mathrm{G}_1^{11} = 0$.

Nous ne nous occuperons dans ce qui va suivre que du point G. Nous aurons à considérer deux cas suivant que les points A, B ne sont pas ou sont conjugués par rapport à Q, c'est-à-dire suivant que l'on a $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \neq 0$ ou $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0$.

Nous nous placerons tout d'abord dans le premier cas.

2. Nous désignerons par (A) la courbe décrite par le point A et par (B) celle qui est décrite par le point B.

Sur la surface (G), les courbes v sont déterminées par les cônes projetant des points A la courbe (B). La tangente à une de ces courbes en un point G passe par le point $\mathrm{G}^{01} = \mathrm{B}'$. De même, les courbes u de la surface (G) sont déterminées par les cônes projetant des points B la courbe (A) et les tangentes aux points G à ces courbes passent par le point $\mathrm{G}^{10} = \mathrm{A}'$.

De la relation (2) on déduit en dérivant successivement par rapport à u et v,

$$\Omega(\mathrm{A}', \mathrm{B}') = 0$$

et les points A′, B′ sont donc conjugués par rapport à Q.

Par dérivations successives par rapport à u et v, on déduit

$$\Omega(\mathrm{A}^{(i)}, \mathrm{B}^{(k)}) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots).$$

On en déduit que les points A′, A″, ... sont conjugués de B′ et sont donc dans l'hyperplan polaire de ce point par rapport à Q. De même, les points B', B'', ... sont situés dans l'hyperplan polaire de A'. En d'autres termes, la courbe (A') appartient à un hyperplan (au moins) et la courbe (B') également à une hyperplan (au moins).

La droite A'B' coupe Q en deux points H_1, H_2 et les droites GH_1, GH_2 sont les tangentes aux courbes qui représentent, sur la surface (G), les développables de la congruence (g). La droite GH_1 représente un faisceau de rayons dont le sommet est un des foyers de la droite g, par exemple x_1, et dont le plan est le plan ξ_2 tangent en x_2 à la surface (x_2). De même, la droite GH_2 représente un faisceau de rayons dont le sommet est le second foyer x_2 de la droite g et dont le plan est le plan focal ξ_1 de g.

Nous aurons à examiner trois cas :

1) La courbe (A') appartient à un seul hyperplan et le point B' est fixe.

2) La courbe (A') appartient à un espace à trois dimensions et (B') est une droite.

3) La courbe (A') appartient à un plan et la courbe (B') au plan conjugué par rapport à Q.

Les cas où la courbe (A') est une droite ou où A' est fixe se ramènent aux deux premiers cas sauf changement de notations.

3. Supposons que la courbe (A') appartienne à un seul hyperplan et que le point B', pôle de cet hyperplan, soit fixe. Une courbe v tracée sur la surface (G) est découpée par le plan projetant la droite BB' de A et les tangentes à cette courbe passent toutes par le point B'. Cette courbe se confond donc avec la droite GB' et le point B' appartient à l'hyperquadrique Q. Il en résulte que la droite A'B' touche Q en B' et que les points H_1, H_2 sont confondus avec B'.

Soit b' la droite correspondant à B'. Lorsque le point G décrit une courbe v, c'est-à-dire une droite GB', la droite g correspondante décrit un faisceau de rayons dont fait partie la droite b'.

On voit donc que dans ce premier cas, la congruence (g) est le lieu des droites de ∞^1 faisceaux de rayons dont les centres se trouvent sur la droite b' et dont les plans passent par cette droite.

4. Passons au second cas, où la courbe (A') appartient à un espace à trois dimensions et où la courbe (B') est une droite.

Une courbe v tracée sur la surface (G) est découpée par le cône, projetant d'un point A la courbe (B) et les tangentes à cette courbe rencontrent la droite (B'). Cette courbe est donc située dans le plan projetant de G la droite (B') et comme elle appartient à Q, c'est une conique. Les courbes v de la surface (G) sont donc des coniques dont les plans passent par la droite (B').

La droite (B') rencontre l'hyperquadrique Q en deux points B_1', B_2' qui appartiennent à toutes les coniques v de (G). Soient b_1', b_2' les droites représentées par ces points. A une conique v de (G) correspond une demi-quadrique contenant les droites b_1', b_2'.

Il est aisé de former les équations d'une telle congruence. Supposons que les droites b_1', b_2' coïncident avec les droites $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$. L'équation d'une quadrique passant par ces droites est

$$x_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2) - x_4(a_{14}x_1 + a_{24}x_2) = 0$$

Les génératrices rectilignes de ces quadriques de même mode que b', b' ont pour équations

$$\left| \begin{array}{l} a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = vx_4, \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 = vx_3, \end{array} \right| \qquad (g)$$

Si nous supposons que les coefficients a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24} sont des fonctions de u, la droite précédente engendre une congruence du type qui vient d'être rencontré.

Les foyers de la droite g sont découpés par la quadrique

$$\begin{vmatrix} a_{13}'x_1 + a_{23}'x_2 & x_4 \\ a_{14}'x_1 + a_{24}'x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

Les surfaces focales sont des réglées ayant pour directives les droites b_1', b_2'.

5. Le troisième cas présente plus d'intérêt. Comme nous l'avons vu, les droites h_1, h_2 représentées par les points H_1, H_2 découpent sur une droite g les foyers de celle-ci et les plans gh_1, gh_2 en sont les plans focaux.

Désignons par σ_u le plan contenant la courbe (A') et par σ_v celui de la courbe (B'). Soit γ_u la conique découpée par σ_u dans l'hyperquadrique Q et γ_v celle qui est découpée par σ_v. Ces coniques représentent deux demi-quadriques ayant même support Φ, quadrique qui est indépendante de u, v.

Considérons un point G et les points A', B', H_1, H_2 correspondants. Soient R_1, R_2 les points de contact des tangentes à γ_u menées par A' et S_1, S_2 les points de contact des tangentes à γ_v menées par B'. Aux points R_1, R_2 correspondent deux génératrices rectilignes r_1, r_2 d'un mode de Φ et aux points S_1, S_2 deux génératrices rectilignes de l'autre mode. Il en résulte que les droites h_1, h_2 sont les diagonales du quadrilatère gauche formé par r_1, r_2, s_1, s_2. En effet, l'hyperplan polaire de A' contient les points G,B', S_1, S_2, R_1, R_2 et celui de B' les points G,A', R_1, R_2, S_1, S_2, donc l'espace $R_1R_2S_1S_2$ est le conjugué de A'B'. Alors, les points H_1, H_2 sont les conjugués de chacun des points R_1, R_2, S_1, S_2 et les droites h_1, h_2 rencontrent chacune des droites r_1, r_2, s_1, s_2.

La droite GH_1 représente un faisceau de rayons contenant les droites g, h_1 et la droite GH_2 un faisceau de rayons contenant les droites g, h_2. Les points $x_1 = gh_1$, $x_2 = gh_2$ sont les foyers de la droite g. Les plans focaux de cette droite sont le plan gh_1 tangent en x_2 à la surface (x_2) et le plan gh_2 tangent en x_1 à la surface (x_1).

Les droites de la congruence linéaire de directrices h_1, h_2 sont représentées par les points de la section de Q par l'espace $R_1R_2S_1S_2$. Comme on l'a vu, la droite g appartient à cette congruence, le point G appartenant à l'espace précédent.

On voit que à la congruence (g) est associée une quadrique fixe Φ. A chaque droite de la congruence correspond sur Φ un quadrilatère gauche dont les diagonales déterminent les foyers et les plans focaux de cette droite.

6. Supposons maintenant que les points A, B soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q, c'est-à-dire que l'on ait

$$2\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = -(\alpha + \beta) = 0, \quad \beta = -\alpha$$

On voit, en dérivant par rapport à u, v la relation précédente que chacun des points A,A', A'',... est conjugué par rapport à Q de chacun des points B,B', B'', ... Il en résulte que chacune des courbes (A), (B) appartient à un hyperplan (au moins).

Si la courbe (A), par exemple, appartient à un hyperplan, le point B, pôle de cet hyperplan, est fixe et le point G ne dépend que de u. La congruence se réduit à une réglée.

Cela étant, nous aurons deux cas à examiner :

1) La courbe (A) appartiznt à un espace à trois dimensions et la courbe (B) se réduit à une droite.

2) Les courbes (A), (B) appartiennent à des plans, conjugués par rapport à Q.

Envisageons le premier cas. Alors, le point B′ est fixe ou bien il décrit la même droite que B. Dans la première hypothèse, on retrouve le premier cas envisagé plus haut et dans la seconde hypothèse, le second cas.

7. Reste le cas où les courbes (A), (B) appartiennent à des plans que nous désignerons respectivement par σ_u, σ_v. Nous désignerons encore par γ_u, γ_v les sections de l'hyperquadrique Q par ces plans.

Observons tout d'abord que les points d'intersection de la droite AB avec l'hyperquadrique Q sont

$$G \equiv G_1 \equiv A + B, \; G_2 \equiv A - B$$

Les tangentes aux courbes u des surfaces (G_1), (G_2) en G_1, G_2 passent par le point A′ et les tangentes aux courbes v passent par le point B′ (qui coïncide avec le point $-$B′).

Aux coniques γ_u, γ_v correspondent les génératrices des deux modes d'une quadrique fixe Φ.

Appelons R_1, R_2 les points d'intersection de γ_u avec la polaire du point A et S_1, S_2 ceux de γ_v avc la polaire du point B. Si r_1, r_2 sont les génératrices d'un mode de Φ correspondant aux points R_1, R_2 et s_1, s_2 les génératrices de l'autre mode correspondant à S_1, S_2, on voit que les droites g_1, g_2 correspondant à G_1, G_2 sont les diagonales du quadrilatère gauche formé par r_1, r_2, s_1, s_2. Cela résulte du fait que la droite AB et l'espace R_1, R_2, S_1, S_2 sont conjugués par rapport à Q.

Cela étant, nous allons construire les droites h_1, h_2.

Soient R'_1, R'_2 les points d'intersection de γ_u avec la polaire de A′ et S'_1, S'_2 ceux de γ_v avec la polaire de B′. La droite A′B′ est la conjuguée de l'espace à trois dimensions $R'_1R'_2S'_1S'_2$ par rapport à Q. Si r'_1, r'_2 sont les génératrices de Φ de même mode que r_1, r_2 qui correspondent aux points R'_1, R'_2 et s'_1, s'_2 les génératrices de même mode que s_1, s_2 qui correspondent à S'_1, S'_2, les droites h_1, h_2 sont les diagonales du quadrilatère gauche formé par r'_1, r'_2, s'_1, s'_2. Ces droites h_1, h_2 coupent g_1, g_2 en leurs foyers.

Précisons ce résultat. Les droites h_1, h_2 coupent la droite g_1 aux foyers x'_1, x'_2 de cette droite et la droite g_2 aux foyers x''_1, x''_2. La droite G_1H_1 représente un faisceau de rayons dont le sommet est le foyer x'_1 et le plan, le plan focal tangent en x'_2 à la surface (x'_2). La droite G_1H_2 représente le faisceau de rayons de sommet x'_2 dont le plan touche la surface (x'_2) en x'_2. La droite G_2H_1 représente le faisceau de rayons de sommet x''_1 dont le plan touche la surface (x''_2) au point x''_2. Enfin le faisceau de rayons représenté par la droite G_2H_2 a pour sommet le point x''_2 et pour plan, le plan tangent en x''_1 à la surface (x''_2).

Dans ce cas également, une quadrique Φ est attachée à la congruence (g). A chaque droite g correspond sur Φ un quadrilatère gauche $r'_1r'_2s'_1s'_2$ dont les diagonales déterminent les foyers et les plans focaux de la droite.

8. Nous avons fait usage d'une propriété bien connue dont nous rappelerons rapidement la démonstration.

Conservons les notations du début. A la gerbe de droites de sommet x_1 correspond sur Q un plan α_1 et à la gerbe de droites de sommet x_2, un plan α_2. Au plan réglé ξ_1 correspond sur Q un plan β_1 et au plan réglé ξ_2 un plan β_2. Ces quatre plans passent par le point G.

Aux droites de ξ_1 passant par x_1 correspondent sur Q les points d'une droite t_1 commune aux plans α_1, β_1. De même aux droites de ξ_2 passant par x_2 correspondent les points d'une droite t_2 commune aux plans α_2, β_2.

Le plan tangent en G à la surface (G) coupe Q suivant deux droites GH_1, GH_2 et aux courbes de la surface (G) ayant ces droites pour tangentes correspondent les développables de la congruence (g). Le point H_1 appartient à l'un des plans α_1, α_2, par exemple au premier. Le point H_2 appartient alors au plan α_2.

La droite h_1 homologue de H_1 passe par x_1. Si cette droite était tangente en x_1 à la surface (x_1), le point H_1 appartiendrait au plan β_1 et les plans α_1, β_1 coïncideraient, ce qui est absurde. Donc H_1 appartient au plan β_2 et H_2 au plan β_1.

Il en résulte que les plans focaux de la droite g sont les plans $gh_2 = \xi_1$ et $gh_1 = \xi_2$.

Liége, le 13 décembre 1961.