Bulletin de la Classe des sciences

Sur les complexes linéaires contenant les tangentes à une courbe algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination du nombre des complexes linéaires de droites, linéairement indépendants, contenant les tangentes à une courbe algébrique.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les complexes linéaires contenant les tangentes à une courbe algébrique

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination du nombre des complexes linéaires de droites, linéairement indépendants, contenant les tangentes à une courbe algébrique.

Dans cette note nous déterminons, par un procédé très simple, le nombre des complexes linéaires de droites, linéairement indépendants, qui contiennent les tangentes à une courbe algébrique C donnée. Nous utilisons la surface qui représente les couples de points non ordonnés de cette courbe C. Nous dirons, suivant une expression généralement utilisée, que la courbe C dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, appartient à ce complexe.

1. Soit C une courbe algébrique irréductible d'ordre n et de genre p appartenant à un espace linéaire S_r à r dimensions. Les complexes linéaires de droites linéairement indépendants de cet espace sont au nombre de $\rho = \frac{1}{2}r(r+1)$. Rapportons projectivement ces complexes aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\rho-1}$ à $\rho - 1$ dimensions. Aux droites de S_r correspondent dans $S_{\rho-1}$ les points de la variété de Grassmann W d'ordre $\frac{2^{r-1}(2r-3)!!}{r!}$

Aux cordes de la courbe C correspondent sur W les points d'une surface F et les sections hyperplanes de F correspondent aux réglées formées par les cordes de C appartenant à des complexes linéaires (¹). Aux tangentes à la courbe C correspondent sur F les points d'une courbe K de genre p.

Une série linéaire g_n^1 découpée sur C par les hyperplans d'un faisceau possède $2(n + p - 1)$ points doubles, donc sur F la courbe K est d'ordre $2(n + p - 1)$.

Les hyperplans de $S_{\rho-1}$ découpent sur la courbe K une série d'ordre $2(n + p - 1)$ certainement non spéciale et par conséquent de dimension $2(n + p - 1) - p$. Il en résulte que la courbe K appartient à

$$\rho - 2(n + p - 1) + p - 1 = \frac{1}{2}r(r + 1) - 2n - (p - 1)$$

hyperplans linéairement indépendants.

En d'autres termes, *la courbe* C, *d'ordre* n, *de genre* p, *de* S_r, *appartient à*

$$\frac{1}{2}r(r + 1) - 2n - (p - 1)$$

complexes linéaires de droites linéairement indépendants.

2. On peut déduire du résultat précédent un théorème de M. B. Segre, à savoir que si la courbe C appartient à $\frac{1}{2}(r - 1)(r - 2)$ complexes linéaires de droites linéairement indépendants, cette courbe est rationnelle normale (²).

(¹) La surface des couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique a été considérée notamment par F. Severi : *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti dell' Academia di Torino, 1902-1903, pp. 185-200). En suivant pas à pas le raisonnement fait par Severi dans le cas où C est la courbe canonique, on trouve facilement que l'ordre de la surface F est $(n - 1)^2 - p$ et que ses sections hyperplanes ont le genre $(n - 2)(n - 3 - 2p)$. La surface F n'est pas nécessairement normale même si la courbe C est normale.

(²) *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti* (Memorie dell' Accademia dei Lincei, série 6, vol. II, pp. 578-592).

En effet, de

$$\frac{1}{2}r(r+1) - 2n - (p-1) = \frac{1}{2}(r-1)(r-2),$$

on déduit

$$2n + p = 2r.$$

Comme $n \geqslant r$, on a nécessairement $n = r$, $p = 0$.

En particulier, si $r = 3$, la courbe C appartient à un complexe linéaire au plus. Dans ce cas, on a $2n + p = 6$ et comme $n \geqslant 3$, on a $n = 3$ et $p = 0$. La courbe C est une cubique gauche.

3. Supposons que la courbe C soit normale, la série découpée par les hyperplans ayant le défaut i. On a $r = n - p + i$. Le nombre des complexes linéaires de droites linéairement indépendants contenant la courbe C est

$$\frac{1}{2}[n^2 - n(2p+3) + (p-1)(p-2)] + \frac{i}{2}(2n - 2p + i + 1).$$

Si la série découpée par les hyperplans est non spéciale ($i = 0$), cette formule est toujours valable.

Appliquons la formule trouvée au cas où C, supposée non hyperelliptique, est la courbe canonique de genre p. *Une courbe canonique de genre* p *appartient à* $\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)\ (\mathrm{p}-10)$ *complexes linéaires indépendants.*

Si la courbe C est une courbe paracanonique normale de genre p, le nombre des complexes linéaires contenant la courbe est $\frac{1}{2}(p-1)(p-12)$.

Liége, le 15 janvier 1962.